


ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

693

PUBLICATIONS DE L'ACADÉMIE INTERNATIONALE
D'HISTOIRE DES SCIENCES

I

ETUDE HISTORIQUE SUR LE PRINCIPE DE LA MOINDRE ACTION

PAR

PIERRE BRUNET

Membre de l'Académie Internationale d'Histoire des Sciences



PARIS

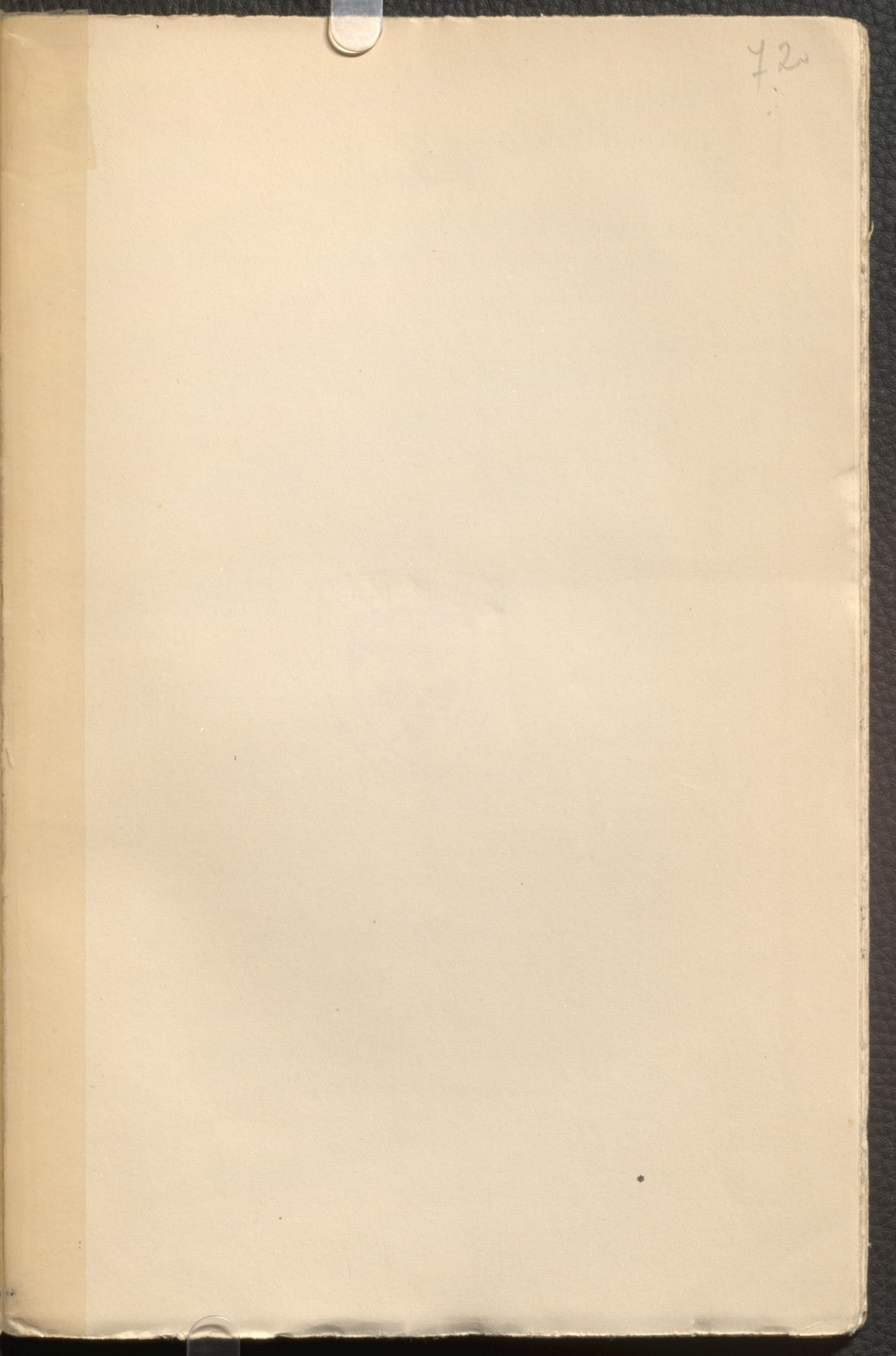
HERMANN & Cie, ÉDITEURS

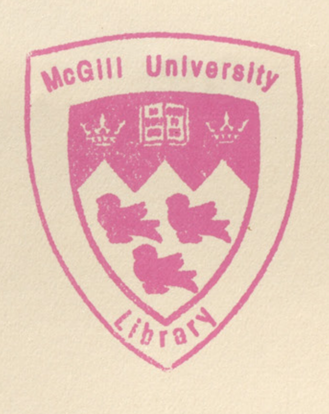
6, Rue de la Sorbonne, 6

—

1938






McGill University
Library

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

693

PUBLICATIONS DE L'ACADÉMIE INTERNATIONALE
D'HISTOIRE DES SCIENCES

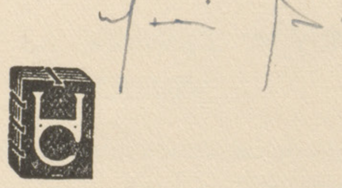
I

ETUDE HISTORIQUE
SUR
LE PRINCIPE
DE
LA MOINDRE ACTION

PAR

PIERRE BRUNET

Membre de l'Académie Internationale
d'Histoire des Sciences



PARIS

HERMANN & Cie, ÉDITEURS

6, Rue de la Sorbonne, 6

—

1938

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR
ET A LA MÊME LIBRAIRIE

*Les physiciens hollandais et la méthode expérimentale en France au XVIII*e *siècle*. 1 vol., 1926.

Maupertuis, I. *L'homme*. II. *L'œuvre et sa place dans la pensée scientifique et philosophique du* XVIIIe *siècle*. 2 vol., 1929.

(Ouvrage couronné par l'Académie des sciences.)

L'introduction des théories de Newton en France au XVIIIe *siècle*. I. *Jusqu'en* 1738. 1 vol., 1931. II. *Après* 1738 (en préparation).

Printed in France.



ÉTUDE HISTORIQUE
SUR
LE PRINCIPE DE LA MOINDRE ACTION

Parmi les principes de la mécanique, il n'en est pas qui ait soulevé d'aussi violentes polémiques que celui de la moindre action. S'il n'est pas né, à vrai dire, dans une atmosphère d'âpres discussions, il ne tarda pas à s'y trouver plongé, par le différend, resté célèbre, élevé, à son sujet, entre Maupertuis et Koenig. Nous ne reviendrons pas ici sur les phases de ce débat, auquel l'intervention de Voltaire donna de si larges répercussions (1) ; nous nous proposons seulement de montrer les origines et l'évolution primitive de ce principe, en indiquant à quelles objections scientifiques il a donné lieu et quels prolongements il a eus dans le développement de la mécanique, au cours du XVIII[e] siècle.

LE PRINCIPE DE LA MOINDRE ACTION CHEZ MAUPERTUIS

C'est en cherchant à résoudre un problème d'optique que Maupertuis fut amené à formuler, pour la première fois, ce principe de la moindre action, dans un mémoire lu, le 15 avril 1744, à l'Académie des Sciences (2). L'explication de la réfraction de la lumière avait mis bien vite aux prises Descartes et Fermat, et la discussion n'avait fait que s'amplifier plus tard, chez leurs disciples et aussi par l'intervention de Leibniz (3).
« Descartes, remarquait Maupertuis, avait avancé le premier que la lumière se meut le plus vite dans les milieux les

plus denses, et, quoique l'explication de la réfraction qu'il en avait déduite fût insuffisante, son défaut ne venait point de la supposition qu'il faisait. Tous les systèmes qui donnent quelque explication plausible des phénomènes de la réfraction supposent le paradoxe ou le confirment.

« Or, ce fait posé, que la lumière se meut le plus vite dans les milieux les plus denses, tout l'édifice que Fermat et Leibniz avaient bâti est détruit : la lumière, lorsqu'elle traverse différents milieux, ne va ni par le chemin le plus court, ni par celui du temps le plus prompt ; le rayon qui passe de l'air dans l'eau, faisant la plus grande partie de sa route dans l'air, arrive plus tard que s'il n'y faisait que la moindre (4). »

Si, dans son mémoire de 1744, Maupertuis crut pouvoir réunir ainsi Fermat et Leibniz dans une même critique, c'est que, sur la foi de Dortous de Mairan, il considérait alors Leibniz comme un partisan de la thèse de Fermat (5).

Quoi qu'il en soit, pour échapper aux difficultés ainsi présentées, Maupertuis proposait de considérer que le chemin suivi par la lumière dans la réfraction était celui par lequel la quantité d'action était *la moindre*. Il continuait en expliquant le sens donné, dans cette expression, au mot action : « Lorsqu'un corps est porté d'un point à un autre, il faut pour cela une certaine action : cette action dépend de la vitesse qu'a le corps et de l'espace qu'il parcourt ; mais elle n'est ni la vitesse ni l'espace pris séparément. La quantité d'action est d'autant plus grande que la vitesse du corps est plus grande, et que le chemin qu'il parcourt est plus long, elle est proportionnelle à la somme des espaces multipliés chacun par la vitesse avec laquelle le corps les parcourt (6). » Cependant, sous cette forme, la définition s'applique bien au cas considéré alors, c'est-à-dire celui de la lumière, mais sans être complète. En effet, « comme il n'y a ici qu'un seul corps, on fait abstraction de sa masse » (7). Pour la compléter, il faut dire : « La quantité d'action est le produit de la masse des corps par leur vitesse et par l'espace qu'ils parcourent. Lorsqu'un corps est transporté d'un lieu dans un autre, l'action est d'autant plus grande que la masse est plus grosse, que la vitesse est plus rapide, que l'espace par lequel il est transporté est plus long » (8).

D'Arcy « et quelques autres, écrivait un peu plus tard Maupertuis (9) ont voulu reprendre le nom d'action dont je me suis servi pour exprimer le produit du corps multiplié par sa vitesse et par l'espace qu'il parcourt. Il aurait peut-être mieux valu l'appeler force : mais ayant trouvé ce mot tout établi par Leibniz et par Wolff pour exprimer la même idée, et trouvant qu'il y répond bien, je n'ai pas voulu changer les termes (10). »

Maupertuis ne pouvait pas manquer de se demander si l'explication, valable pour la réfraction, l'était encore pour les autres phénomènes de la lumière. La question était même pour lui d'autant plus importante qu'il tenait beaucoup, pour des raisons plus philosophiques que scientifiques, à trouver des principes très généraux. Aussi lisons-nous dans son mémoire : « Mais ce fonds, cette quantité d'action que la nature épargne dans le mouvement de la lumière à travers différents milieux, le ménage-t-elle également lorsqu'elle est réfléchie par des corps opaques, et dans sa simple propagation ? Oui, cette quantité est toujours la plus petite qu'il est possible.

« Dans les deux cas de la réflexion et de la propagation, la vitesse de la lumière demeurant la même, la plus petite quantité d'action donne en même temps le chemin le plus court et le temps le plus prompt. Mais ce chemin le plus court et le plus tôt parcouru n'est qu'une suite de la plus petite quantité d'action ; et c'est cette suite que Fermat avait prise pour le principe (11). »

Non content d'avoir fait, de ce principe de la moindre action, la loi générale du mouvement de la lumière, Maupertuis, dans un mémoire présenté en 1746 à l'Académie de Berlin (12), s'appliquait à l'étendre aussi non seulement au choc des corps, mais encore aux cas d'équilibre.

Pour le choc, après avoir distingué et défini les corps durs et les corps élastiques (13), rappelé les lois fondamentales du choc (14) et posé à titre de principe général celui de la moindre action, Maupertuis examinait successivement le mouvement des corps durs et celui des corps élastiques. Concluant sur le second cas, il remarquait (15) : « Ici la somme des forces vives se conserve après le choc ; mais cette conservation n'a lieu que pour les corps élastiques, et non pour les corps durs.

Le principe général, qui s'étend aux uns et aux autres, est que la quantité d'action, nécessaire pour causer quelque changegement dans la Nature, est la plus petite qu'il est possible (16). »

En ce qui concerne l'équilibre, déjà quelques années auparavant, en 1740, Maupertuis, rompant avec les méthodes de Fermat et de Varignon (17), avait formulé ainsi une *Loi du repos des corps :* « Soit un système de corps qui pèsent, ou qui sont tirés vers des centres par des forces qui agissent chacune sur chacun, comme une puissance N de leurs distances aux centres, pour que tous ces corps demeurent en repos, il faut que la somme des produits de chaque masse par l'intensité de sa force et par la puissance N + 1 de sa distance au centre de sa force (qu'on peut appeler la *somme des forces du repos*) fasse un *maximum* ou un *minimum* (18). »

A cette loi, Maupertuis se flattait, dans le même mémoire, de subordonner le principe alors fondamental de la statique. En effet, « si l'on considère maintenant, expliquait-il (19), tous les lieux des forces réunis, et toutes les forces réunies dans un seul point, et cette force qui en est le résultat comme constante, et agissant sur tous les corps, on voit que le système sera en équilibre lorsque la somme des corps multipliés chacun par sa distance au centre de force fera un *maximum* ou un *minimum*.

« Et, si l'on suppose ce centre de force à une distance infinie du système, il est clair que, pour que le système soit en équilibre, *il faut que le centre de gravité de tous les corps qui le composent soit le plus bas ou le plus haut qu'il soit possible, ou le plus près ou le plus loin du centre de force.* Et ce principe fondamental de la statique ordinaire n'est qu'une suite et un cas particulier du nôtre. »

La généralité de sa loi avait déjà aux yeux de Maupertuis une grande importance (20). Mais celle-ci lui apparaissait d'autant plus dans son mémoire de 1746 que la loi en question, en se subordonnant elle-même au principe de la moindre action, donnait du même coup à celui-ci une ampleur remarquable. Si, en effet, la loi du repos posait la possibilité d'un minimum ou d'un maximum, celui-ci ne se trouve réalisé que dans des cas, sinon exceptionnels, au moins spéciaux (21),

tandis que généralement, c'est le minimum qui est la règle. De telle sorte que le mémoire de 1740 préparait en somme par avance l'application du principe de la moindre action à l'équilibre, telle qu'elle ressort du mémoire de 1746.

Ainsi donc, en résumé, « dans le choc des corps, le mouvement se distribue de manière que la quantité d'action, que suppose le changement arrivé, est la plus petite qu'il soit possible. Dans le repos, les corps qui se tiennent en équilibre doivent être tellement situés que, s'il leur arrivait quelque petit mouvement, la quantité d'action serait la moindre ». Puis, généralisant encore, Maupertuis continuait : « Les lois du mouvement et du repos déduites de ce principe se trouvant précisément les mêmes qui sont observées dans la nature, nous pouvons en admirer l'application dans tous les phénomènes. Le mouvement des animaux, la végétation des plantes, la révolution des astres n'en sont que les suites ; et le spectacle de l'univers devient bien plus grand, bien plus beau, bien plus digne de son Auteur, lorsqu'on sait qu'un petit nombre de lois, le plus sagement établies, suffisent à tous ces mouvements. C'est alors qu'on peut avoir une juste idée de la puissance et de la sagesse de l'Être suprême... Quelle satisfaction, pour l'esprit humain, en contemplant ces lois, qui sont le principe du mouvement et du repos de tous les corps de l'univers, d'y trouver la preuve de l'existence de Celui qui le gouverne (22). » Ces dernières remarques révèlent bien les préoccupations téléologiques déjà très nettes dans le mémoire de 1744 et sur lesquelles nous aurons bientôt à revenir.

Dans l'*Essai de Cosmologie,* Maupertuis, « considérant les directions de la pesanteur comme parallèles entre elles et perpendiculaires à un levier droit auquel étaient appliqués deux corps, ainsi qu'on a coutume de faire dans la statique ordinaire », fit de nouveau application du principe de la moindre action à l'équilibre. Dans l'édition de 1756, il renvoya simplement, sur la question de l'équilibre et du repos, à cette loi générale, qui « au reste s'accorde si parfaitement, remarquait-il (23), avec celle de la moindre quantité d'action, qu'on peut dire qu'elle n'est que la même ».

Euler avait d'ailleurs largement contribué entre temps à faire ressortir cet étroit rapport entre les deux principes, et

c'était là même l'objet essentiel de son mémoire sur l'*Harmonie entre les principes généraux de repos et de mouvement de M. de Maupertuis.* « On voit donc clairement, disait-il d'abord (24) en parlant de la moindre action, que ce principe de mouvement de M. de Maupertuis est une conséquence nécessaire de son principe général de repos ou d'équilibre. » Puis, après une « démonstration accomplie de l'identité des deux principes de M. de Maupertuis », Euler en arrivait à poser qu'en raison même de cette identité, le rapport de conséquence primitivement révélé se trouvait réciproque : « On conviendra aussi aisément que, comme j'ai dérivé le principe de mouvement de celui de repos, celui-ci doit aussi être une suite de celui-là ; quoique la démonstration devienne plus embarrassée. Car, si l'on veut passer du mouvement au repos, on doit supposer le mouvement infiniment petit, ce qui cause de grandes brouilleries dans la considération des vitesses infiniment petites et des espaces qui en sont parcourus dans un temps infiniment petit, lesquels seront exprimés par des différentielles du second ordre. Mais, ayant démontré l'identité de ces principes, on n'a qu'à se servir de l'idée de l'effort dans les cas d'équilibre, et on sera assuré qu'elle revient au même, que si l'on était entré actuellement dans le détail du mouvement infiniment petit (25). »

Si donc il y a avantage à démontrer le principe sous sa forme de principe de repos (26), sans que cela nuise en rien au maintien de l'identité foncière des deux expressions, il est préférable de le formuler : « Lorsqu'il arrive quelque changement dans la Nature, la quantité d'action nécessaire (26 *bis*) pour ce changement, est la plus petite qu'il soit possible (27). » Et il s'agit bien là d'un « principe véritablement universel... qui a lieu dans le mouvement des corps durs, des corps élastiques, de la lumière et de toutes les substances corporelles » (28).

L'ORIGINALITÉ DU PRINCIPE DE MAUPERTUIS

L'essentiel de la discussion entre Maupertuis et Koenig consistait en une contestation par celui-ci (29) de la priorité de

Maupertuis concernant la découverte du principe de la moindre action. Sans insister sur les péripéties de cette querelle, dans laquelle les torts furent assurément partagés, nous devons envisager avec quelque attention le fond même du débat.

En ce qui concerne l'attribution du principe de la moindre action à Leibniz, une triple question se pose : le texte cité de Leibniz est-il authentique ? En admettant que ce texte soit authentique, établirait-il véritablement la priorité de Leibniz ? Enfin, dans le doute et en rejetant ce texte, pourrait-on trouver dans d'autres passages de l'œuvre de Leibniz, quelques preuves en faveur de l'assertion de Koenig ?

Sur le premier point, il faut dire que la lettre alléguée par Koenig et qui aurait été adressée par Leibniz à Hermann, le 16 octobre 1707, ne fut jamais retrouvée, malgré les actives recherches faites dans les papiers de Henzi (décapité à Berne en 1749 à la suite d'une conspiration), détenteur désigné de ce document. Son existence ne conserve-t-elle dès lors aucune probabilité ? Peut-être serait-ce aller trop loin que de prendre nettement position en ce sens. En effet, par la suite, von Murr dit avoir appris que la lettre en question avait été adressée par Leibniz, non pas à Hermann, mais à Varignon. La chose paraît plausible, d'autant plus qu'à la date indiquée comme étant celle de la lettre citée (16 octobre 1707), il y a une interruption dans la correspondance entre Leibniz et Varignon (30). D'ailleurs, le texte présumé de cette lettre pourrait s'accorder avec le reste de la correspondance ; et même le début de la lettre, où Leibniz s'enquiert de la santé de Varignon, est rendu vraisemblable par le contenu de la lettre précédente de celui-ci, datée du 3 septembre.

Resterait à expliquer comment Koenig aurait eu entre les mains une copie de cette lettre. Cependant il n'est pas impossible qu'il l'ait tenue de Henzi, amateur d'autographes. Mais comment admettre que celui-ci ait été en possession d'une lettre adressée par Leibniz à Varignon ? On a supposé que Raspe, qui fut conservateur de la bibliothèque de Hanovre, et capable, si l'on en croit sa réputation, de soustraire des manuscrits, aurait vendu à Henzi cette lettre de Leibniz, qui aurait été ensuite détruite avec les papiers de l'acheteur. Mais

les dates de la biographie de Raspe s'accordent mal avec cette supposition. Un autre point demanderait des éclaircissements : comment Koenig aurait-il indiqué Hermann et non Varignon comme destinataire de la lettre ?

Il convient d'ajouter pourtant qu'il apparaît actuellement moins probable que la lettre en question ait été adressée à Varignon, comme on l'avait supposé à la suite de von Murr. Willy Kabitz notamment, dans une communication faite en 1913 à l'Académie des Sciences de Berlin (31) considère que l'interruption qui se trouve dans la correspondance entre Leibniz et Varignon, dans l'édition de Gerhardt (Halle 1859), ne permet pas de conclusion sur la vraisemblance avec laquelle y trouverait place la lettre invoquée par Koenig. A son avis, la question du destinataire de la lettre reste ouverte.

Par contre l'authenticité de la lettre serait, d'après lui, beaucoup plus plausible que ne le laisseraient généralement penser les circonstances de sa recherche et certaines opinions émises sur la question. Kabitz appuie toute son argumentation à ce sujet sur la découverte, à la bibliothèque de Gotha, d'un intéressant codex provenant de Jean III Bernoulli. On peut y voir, outre un certain nombre de pièces ayant fait partie de la succession de Jean I Bernoulli, une certaine quantité de Leibnitiana. Comment ces derniers documents se sont-ils trouvés en la possession de Jean III Bernoulli, il est impossible de l'expliquer d'une façon certaine, et même bien difficile d'avancer à ce sujet quelques affirmations probables. Quoi qu'il en soit, le contenu du codex est d'autant plus intéressant pour la solution du problème en question qu'il contient, entre autres Leibnitiana, les copies de neuf lettres de ou à Leibniz, parmi lesquelles la septième comporte précisément le texte de celle invoquée par Koenig. Or, de toutes ces copies de lettres, la septième exceptée, les originaux existent à la bibliothèque de Hanovre ; ce qui constitue une présomption en faveur de l'existence aussi à un moment donné de l'original de la septième. W. Kabitz fait remarquer qu'il doit exister une collection intermédiaire de copies, qui auraient été faites directement sur les originaux et que celles de la bibliothèque de Gotha n'auraient fait que reproduire. Koenig aurait donc pu utiliser des copies détenues par Samuel Henzi ; celles-ci ayant

été faites soit directement sur les originaux, soit indirectement comme le recueil de Gotha.

Quoi qu'il en soit, voyons ce que serait susceptible d'établir le passage de cette lettre auquel se référait Koenig. En voici les termes tels qu'ils se trouvent à la fin du mémoire publié dans les *Acta Eruditorum* : « L'action n'est point ce que vous pensez, la considération du temps y entre ; elle est comme le produit de la masse par le temps, ou du temps par la force vive. J'ai remarqué que, dans les modifications des mouvements, elle devient ordinairement un maximum ou un minimum. On en peut déduire plusieurs propositions de grande conséquence : elle pourrait servir à déterminer les courbes que décrivent les corps attirés à un ou plusieurs centres. Je voulais traiter de ces choses entre autres dans la seconde partie de ma Dynamique, que j'ai supprimée, le mauvais accueil que le préjugé a fait à la première m'ayant dégoûté (31 *bis*). »

Sous cette forme du moins, la définition de l'action attribuée à Leibniz ne paraîtrait guère digne du savant philosophe, et ne pourrait qu'avec peine soutenir la comparaison avec celle de Maupertuis. Mais, dans la copie envoyée plus tard par Koenig à Maupertuis, celui-là apporta une correction nécessitée, précisait-il, par une faute d'impression dans le Journal de Leipzig. Il rétablit alors la formule : « Elle est comme le produit de la masse par celui de l'espace et de la vitesse, ou du temps par la force vive. »

Remarquons dès maintenant que, si cette correction rendait la définition acceptable, en en faisant en même temps une expression anticipée de celle proposée par Maupertuis, elle n'en laissait pas moins subsister, sur un autre point, une différence importante. En effet, ainsi que le souligne Helmholtz (32), Leibniz, d'après la lettre citée par Koenig, affirme seulement que l'action devient « ordinairement » un maximum ou un minimum ; et il serait difficile de trouver dans une telle formule l'expression d'un principe général, tel que voulait l'établir Maupertuis. Bien plus, l'action, si l'on s'en tient aux termes mêmes de Leibniz, n'est pas estimée un minimum, mais seulement un maximum ou minimum. Nous allons avoir à revenir bientôt sur ce point, pour examiner ce qu'impliquerait cette différence avec le minimum de Maupertuis.

D'ailleurs, en l'absence de preuves confirmant la réalité de cette assertion chez Leibniz, ce n'est pas sur de telles idées, mais sur celles effectivement exprimées par le grand philosophe, qu'il convient surtout de fonder une discussion. C'est ce que fit Euler dans une importante étude, insérée dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* (33). « Nous concluons, dit-il, avec assurance que le principe de la moindre action, non seulement a été entièrement inconnu à Leibniz, mais encore qu'il a employé un principe fort différent, qui ne s'accordait avec celui-là que dans un très petit nombre de cas très singuliers ; pendant que, dans une infinité d'autres, il lui était manifestement contraire. » En effet, Leibniz, dans son article paru dans les *Acta Eruditorum*, en 1682, établit que la lumière, dans sa réfraction, obéit à un principe de la route la plus facile ; et c'est ce principe qui, selon Euler, est, dans la plupart des cas, contraire à celui de la moindre action. Car la route la plus facile est celle précisément où le produit de l'espace par la résistance est un minimum ; et dès lors « il ne saurait accorder cela avec le principe de la moindre action dans aucun autre cas que dans ceux où la vitesse croît proportionnellement avec la résistance ; cas qui sont assurément bien rares, si l'on n'ose pas dire qu'il ne s'en trouve aucun » ; attendu que la plupart des expériences montrent au contraire que la résistance diminue la vitesse (34) et que par conséquent elle ne peut pas être prise pour sa mesure et se substituer à elle dans le calcul.

Et quand Euler, après avoir distingué ces deux principes, se demande quelle est leur valeur respective, il note, en ce qui concerne celui de Leibniz, que la difficulté, c'est-à-dire le produit de la route par la résistance, est bien souvent à peu près impossible à calculer ; car « dans la plupart des cas, il sera absolument impossible de définir ce qu'on doit entendre par la résistance, qui est un terme très vague ; et, lorsqu'il n'y aura aucune résistance, comme dans le mouvement des corps célestes, comment cette difficulté devra-t-elle être estimée ? Sera-ce par la seule route décrite, puisque, la résistance étant nulle, on pourrait la regarder comme partout la même ? Mais alors il s'ensuivrait que, dans ces mouvements, la route elle-même décrite devrait être le minimum et par conséquent

la ligne droite ; ce qui est entièrement contraire à l'expérience. Si au contraire le mouvement se fait dans un milieu résistant, dira-t-il que ce mouvement sera tel que le produit de la route décrite multipliée par la résistance soit un minimum ? On tirerait de là les conclusions les plus absurdes. On voit donc clairement que le principe de la route la plus facile, tel qu'il a été proposé et expliqué par Leibniz, ne saurait s'appliquer à aucun autre phénomène qu'à celui du mouvement de la lumière. » C'était en effet, nous l'avons vu, le phénomène étudié par Leibniz dans le mémoire en question.

Au point de vue des idées générales, ce qui se dégage de cette dissertation de 1682, c'est une affirmation fondamentale dans la philosophie de Leibniz, et sur laquelle celui-ci insiste également dans un article un peu postérieur, publié aussi dans les *Acta Eruditorum* (35) : « A mon avis, c'est par des raisons déterminées de sagesse et d'ordre que Dieu en est arrivé à l'obligation d'établir ces lois que l'on observe dans la nature ; d'où il apparaît même, ce que j'ai personnellement fait remarquer autrefois à l'occasion d'une loi optique (notons ici la référence explicite à l'article de 1682, considéré par Euler) et que Molyneux a, dans sa *Dioptrique,* fort approuvé ensuite, que la cause finale ne sert pas seulement à la vertu et à la piété en éthique et dans la théologie naturelle, mais encore dans la physique elle-même pour trouver et découvrir les vérités cachées. » Bien plus, Leibniz, reprenant, presque dans les mêmes termes, la question dans les *Nouveaux essais sur l'entendement humain,* écrit : « Cette maxime, que la nature agit par les plus courtes voies, ou du moins par les plus déterminées, suffit seule pour nous rendre raison presque de toute l'optique, catoptrique et dioptrique, c'est-à-dire de ce qui se passe hors de nous dans les actions de la lumière, comme je l'ai montré autrefois, et M. Molyneux l'a fort approuvé dans sa *Dioptrique,* qui est un très beau livre (36). »

Cette importance accordée, sous cette forme, à la finalité implique-t-elle, malgré les difficultés soulevées par Euler, le principe de la moindre action ? L'admettre entraînerait, semble-t-il, à chercher par là même hors de la pensée strictement leibnizienne les origines de ce principe. On sait en effet quelle place la simplicité des voies tient dans la philosophie

de Malebranche, et quel rôle celui-ci fait jouer à des considérations de ce genre dans ses explications. D'ailleurs les contemporains de Maupertuis, en envisageant les choses de ce biais, en arrivaient déjà à chercher dans cette direction certains rapprochements. Bien plus, Maupertuis lui-même reconnaissait très volontiers les rapports de son principe avec celui de la simplicité des voies de la nature. Mais il protestait contre toute tentative d'assimilation : « Ceux, dit-il (37), qui n'étaient pas assez instruits dans ces matières crurent que je ne faisais ici que renouveler l'ancien axiome que la nature agit toujours par les voies les plus simples. Mais cet axiome, qui n'en est un qu'autant que l'existence et la providence de Dieu sont déjà prouvées, est si vague que personne encore n'a su dire en quoi il consiste. »

Examinant également cette question, d'Alembert remarque « que ce principe (de la moindre action) est tout différent de celui-ci que la nature agit toujours par la voie la plus simple ; car ce dernier principe est un principe vague, dont on peut faire cent applications toutes diférentes, selon la définition qu'on voudra donner de ce qu'on regarde comme la voie la plus simple de la nature, c'est-à-dire selon qu'on voudra faire consister la simplicité de la nature et sa voie la plus courte ou dans la direction rectiligne, c'est-à-dire dans la brièveté de la direction, ou dans la brièveté du temps, ou dans le minimum de la quantité de mouvement, ou dans le minimum de la force vive, ou dans celui de l'action, etc... Le principe de M. de Maupertuis n'est donc pas le principe de la voie la plus simple pris vaguement, mais un exposé précis de ce qu'il croit être la voie la plus simple de la nature (38). » On ne saurait, croyons-nous, résoudre la question d'une manière plus précise, en marquant nettement que, si le principe de la simplicité des voies peut comprendre et enfermer, pour ainsi dire, dans sa généralité, celui de la moindre action, celui-ci conserve, par sa plus grande précision, son individualité et sa nouveauté.

D'Alembert était d'ailleurs sur ce point en complet accord avec Euler, qui écrivait à ce sujet : « Il n'est pas ici question de chercher qui a dit le premier que dans la nature, il y avait une telle loi (plus grande facilité des voies ou moindre dépense) ? Mais qui a été le premier qui a fait connaître

exactement cette loi ? Et qui a déterminé le véritable fonds que la nature épargne, non pas seulement quelquefois, mais épargne toujours, et dans toutes ses opérations ? Et c'est cela que nous nions avec la plus grande justice qu'aucun autre ait fait avant notre ill. Président. Nous accorderons donc facilement que plusieurs ont reconnu en général cette loi, mais l'ont reconnue si obscurément, qu'on ignorait entièrement ce que c'est que la nature épargne (39). »

Il faut noter expressément d'autre part que cette précision nouvelle donnée au principe, bien loin d'en restreindre la portée, permettait au contraire d'en multiplier les applications : pour n'être plus aussi vague, il n'en devenait pas moins fort général, et dépassait en ce sens tout ce qui avait été partiellement entrevu, d'une manière ou d'une autre, jusque là. C'est un point sur lequel Euler ne manquait pas d'insister : « Nous accordons même, continuait-t-il (40), que, dans quelques-unes de ses opérations (il s'agit de celles de la nature), quelques auteurs ont connu ce qui était un *minimum ;* mais ce n'a été que dans des cas si particuliers, qu'on ne pouvait jamais l'appliquer aux autres cas, ou que du moins on ne voyait aucun moyen d'en faire l'application. Mais, quoique cette première connaissance soit digne de louanges, et doive être regardée comme ayant ouvert la route à une connaissance plus étendue, puisque nos connaissances ne s'élèvent que par degrés des plus particulières aux plus générales ; cependant, comme on considère ici la force universelle de la nature, qui s'étend à toutes ses opérations, on n'en peut rien attribuer à ce qui ne subsiste que dans des cas particuliers. Et l'on doit dire que celui qui a déterminé ce qui, dans toutes les opérations de la nature, est un *minimum,* est celui qui a découvert ce que la nature se propose ; en quoi consiste le dernier degré de notre connaissance. Or avant M. de Maupertuis, il ne se trouve certainement personne qui ait pu prétendre à cette découverte ; et par cela seul qu'il a clairement exposé cette loi universelle, on voit assez que la gloire de la première invention lui est due. Car comment pourrait-on croire qu'il eût pris d'un autre ce que personne avant lui n'avait dit savoir ? »

Certains auteurs voient toutefois la question sous un aspect bien différent. C'est ainsi que Louis Couturat (41) (persuadé

d'ailleurs que la lettre invoquée par Koenig a effectivement été écrite par Leibniz) estime que les documents existants suffisent à établir qu'entre le principe des voies les plus simples, tel qu'il est chez Malebranche, et la façon dont le conçoit Leibniz, « il y a toute la distance qui sépare un aphorisme théologique d'un axiome mathématique » (42). A son avis, la téléologie leibnizienne ne prend tout son sens que si l'on en retrouve l'origine logico-mathématique, et si l'on comprend que le meilleur ou la perfection dont parle Leibniz « consiste encore, en définitive, en un maximum ou un minimum quantitatif » (43). De ce point de vue, on arrive à envisager que, si le principe de la moindre action n'a pas été explicitement formulé par Leibniz, la façon dont ce philosophe concevait la finalité dans l'univers en contenait implicitement beaucoup plus que les assises générales, et, sinon l'expression mathématique complète, au moins les éléments clairement déterminés. En d'autres termes, à défaut du principe lui-même, il existerait déjà chez Leibniz, outre la méthode scientifique (et non pas seulement philosophique) qu'il suppose, tout ce qui le caractérise dans sa précision et en permet l'application générale. C'est à dire que la généralité ne tiendrait plus, comme pour la vague maxime de la simplicité des voies, à quelque indétermination, mais tout au contraire à la fécondité dans l'usage scientifique provenant de la netteté même de l'appareil mathématique utilisé.

Il est de fait, et c'est ce qu'ont surtout rendu manifeste les publications successives d'inédits de Leibniz, que, dans la pensée de ce philosophe, les notions de maximum et de minimum ne cessent guère de se présenter, sous divers aspects et dans différentes circonstances, spécialement vers les années qui avoisinent 1700. Particulièrement significatifs, à ce point de vue, sont, comme l'a encore montré récemment Adolf Kneser (44), le *Tentamen anagogicum* (que Gerhardt place entre les années 1690 et 1695, mais qui, en réalité, doit avoir été composé après 1696, puisque Leibniz y prend à un certain endroit comme exemple la courbe brachystochrone, qui, dans sa correspondance avec Jean Bernoulli, n'apparaît qu'en 1696) et le *De rerum originatione radicali,* qui, écrit en 1697, fut publié pour la première fois par Erdmann en 1840. Voici d'abord ce qu'affirme Leibniz dans ce dernier travail :

« Parmi l'infinité des combinaisons de possibles et des séries possibles, celle-ci existe qui amène à l'existence le plus d'essence ou de possibilité. C'est-à-dire qu'il y a toujours dans les choses un principe de détermination qui doit être tiré d'un maximum ou minimum, à savoir, de sorte que le maximum d'effet soit obtenu avec le minimum de dépense, pour ainsi dire. » « Et voilà, continue un peu plus loin Leibniz, qui fait admirablement comprendre comment dans la production originelle même des choses une certaine mathématique divine ou un mécanisme métaphysique intervient, et une détermination du maximum trouve place. C'est ainsi que, de tous les angles, c'est le droit qui est déterminé en géométrie, et c'est ainsi que les liquides placés de manière quelconque prennent d'eux-mêmes la forme ayant la plus grande capacité, c'est-à-dire la (forme) sphérique, mais surtout c'est ainsi que, dans la mécanique ordinaire elle-même, plusieurs corps graves s'opposant mutuellement des résistances prennent enfin ce mouvement bien défini, par lequel il y a dans l'ensemble la plus grande descente. De même en effet que tous les possibles tendent au même titre à l'existence en raison de leur réalité, ainsi tous les poids tendent au même titre à descendre en raison de leur gravité ; et de même qu'ici le mouvement qui se réalise est celui qui comporte la plus grande descente possible des graves, ainsi là se réalise le monde par lequel se fait la plus grande réalisation de possibles. »

Pour intéressants que soient ces textes, pouvons-nous considérer que le principe de la moindre action s'y trouve « au moins aussi bien exprimé que chez Maupertuis, qui n'est jamais parvenu à en donner une formule exacte, ni à en faire une seule application correcte » ? Ce n'est pas notre avis. Tout au plus ces importants passages rendent-ils vraisemblable l'existence de la lettre invoquée par Koenig. Plus que celle-ci même, ils posent un principe, puisqu'on n'y trouve pas le restrictif « ordinairement » ; mais par contre le principe d'économie ici affirmé n'est pas suffisamment explicite pour que l'on puisse considérer le minimum de dépense comme synonyme de minimum d'action. En réalité, la notion leibnizienne de dépense reste beaucoup plus large, mais aussi plus indéterminée, que l'idée d'action chez Maupertuis. Et si l'on faisait

observer que, par son ampleur même, la notion de dépense pouvait englober, en quelque sorte, celle d'action, qui d'ailleurs dès cette époque n'était pas étrangère à la pensée de Leibniz, il n'en serait que plus difficile d'expliquer pourquoi celui-ci n'aurait pas fait explicitement l'application du principe général d'économie à cette forme spéciale de dépense représentée par l'action. Il eût fallu pour cela que, passant, pour ainsi dire, à côté du principe de la moindre action, il ne songeât pas à s'arrêter sur cette intéressante considération.

Quant au *Tentamen anagogicum,* l'idée essentielle qui s'en dégage rejoint sans aucun doute l'affirmation à laquelle nous avons vu déjà Leibniz attacher une si grande importance, à savoir que la finalité se superpose au mécanisme, ou plutôt se le subordonne en y pénétrant. La détermination « architectonique » diffère de la géométrique, en ce que cette dernière présente une nécessité absolue, alors que dans la première, il y a seulement une nécessité de choix : son contraire, sans impliquer contradiction, apporterait seulement avec lui l'imperfection. Toute l'argumentation se rattache en somme au principe général de perfection, exprimé ou rappelé à bien des reprises au cours du traité. Or les rapprochements que l'on peut faire (45) entre le *Tentamen anagogicum* et la correspondance échangée par Leibniz avec Jean Bernoulli en 1696 ne manquent pas de jeter quelque lumière sur la signification du principe de perfection. En effet, la solution apportée dans cette correspondance au problème de la courbe brachystochrone et la méthode employée pour y parvenir contiennent, pour ainsi dire, en germe les idées fondamentales qui trouveront leur expression dans le calcul des variations (46). Ne peut-on pas dès lors considérer le principe de perfection comme une sorte de transposition sur un plan plus métaphysique, des concepts mathématiques formant la base de la conception leibnizienne concernant le problème envisagé ? Certes Leibniz, dans ce qu'il écrit à Jean Bernoulli, est avant tout préoccupé de mettre au point une méthode de calcul ; il n'en est pas moins vrai que les considérations de *maximum* et de *minimum* qu'il développe à ce propos, en même temps qu'elles rendent d'autant plus vraisemblable l'existence de la lettre invoquée par

Koenig, paraissent bien être en étroite corrélation avec la téléologie dont est rempli le *Tentamen*.

D'ailleurs un texte même, très caractéristique, de ce traité nous invite de façon précise à rechercher des correspondances et à établir, sinon des équivalences, du moins des relations étroites entre les deux séries de développements logico-mathématiques. De l'avis de Couturat, le passage que nous reproduisons ci-dessous d'après lui (47) ne laisse subsister aucun doute à cet égard. Nous y lisons en substance : « Ce qui me paraît le plus beau dans cette considération est que ce principe de la perfection, au lieu de se borner seulement au général, descend aussi dans le particulier des choses et des phénomènes, et qu'il en est à peu près comme dans la méthode des formes les meilleures, c'est-à-dire fournissant un *maximum* ou un *minimum*, que nous avons introduite dans la géométrie au delà de l'ancienne méthode des quantités les plus grandes et les plus petites. Car ce meilleur de ces formes ou figures ne se trouve pas seulement dans le tout, mais encore dans chaque partie, et même il ne serait pas d'assez dans le tout sans cela. Par exemple, si dans la ligne de la plus courte descente entre deux points donnés, nous prenons deux autres points à discrétion, la portion de cette ligne interceptée entre eux est encore nécessairement la ligne de la plus courte descente à leur égard. C'est ainsi que les moindres parties de l'univers sont réglées suivant l'ordre de la plus grande perfection ; autrement le tout ne le serait pas. » Comme on le voit, ce texte est particulièrement explicite et susceptible de soutenir d'importantes conclusions. Le principe de la moindre action n'est pas ici entrevu, de quelque manière, sous une forme qui l'annoncerait plus qu'elle ne l'exprimerait, à proprement parler. Par là, Leibniz fait plus que devancer Maupertuis, il anticipe brillamment sur la méthode qui, entre les mains d'Euler et de Lagrange, ouvrira des voies fécondes. C'est un point dès maintenant suffisamment établi pour que nous n'ayons pas à y insister davantage.

Est-ce à dire que du même coup soit résolu par la négative le problème de l'originalité de Maupertuis ? Il est bien difficile d'en être persuadé, si l'on considère, comme on le doit, que les textes auxquels nous venons de nous référer sont restés

très longtemps inédits (48) et n'ont sûrement été connus ni des contemporains de Maupertuis, ni même de ceux de Lagrange. Bref, en présence des documents dont nous disposons aujourd'hui, nous pouvons actuellement admettre que deux groupes de conceptions et de recherches leibniziennes contenaient, jusqu'à un certain point, en germe des idées analogues à celles qui constituent les éléments successivement apparus du principe dit de la moindre action. En ce qui concerne le premier groupe, à savoir certaines méthodes de calcul faisant intervenir les notions de maximum et de minimum, Maupertuis est resté à peu près étranger à leur influence, du moins directe (car il faut réserver la possibilité d'une influence par l'intermédiaire de Jean Bernoulli, tant sur Maupertuis que sur Euler). Que le second groupe, celui des considérations logico-métaphysiques, ait été, comme nous venons de le voir, assez étroitement lié au premier dans la pensée de Leibniz, il n'en est pas moins vrai que cette liaison n'était guère *alors* explicite, et surtout clairement formulée ; à tel point que l'on pouvait fort bien emprunter au grand philosophe seulement ses conceptions téléologiques comme principes directeurs de la recherche scientifique. Que Maupertuis, en cédant à cette tendance, se soit laissé marquer de l'empreinte leibnizienne, cela n'est pas douteux ; mais, même en s'engageant dans la voie téléologique, Maupertuis ne s'est pas contenté d'y suivre Leibniz.

En effet, parce qu'il doit, dans la pensée de son auteur, mettre en lumière la sagesse divine, le principe de la moindre action fait apparaître le minimum comme essentiel à sa formule ; tandis que cette condition ne s'imposait nullement à la téléologie plus souple de Leibniz. Maupertuis prétend trouver dans une expression mathématique unique, règle générale de l'univers, la marque indiscutable de la Providence. Son dessein apparaît nettement dans cet avant-propos de l'*Essai de cosmologie :* « Par là, lisons-nous (48 *bis*), l'univers annonce la dépendance et le besoin où il est de la présence de son Auteur ; et fait voir que cet Auteur est aussi sage qu'il est puissant. » Et un peu avant, repoussant une objection soulevée : « J'aurai bientôt répondu, dit-il, à ceux qui blâment l'usage que j'ai fait des causes finales dans une matière mathéma-

tique ; c'est justement ce qu'il y a de mathématique dans cette matière qui rend plus victorieuse l'application que j'y ai faite des causes finales (49). » Quelle que soit la valeur intrinsèque de l'idée, il est clair qu'elle marque l'originalité de Maupertuis, et donne au principe de la moindre action une signification tout à fait spéciale (50).

Déjà dans le mémoire de 1744, les mêmes idées se trouvaient exprimées : « Je connais, y est-il dit, la répugnance que plusieurs mathématiciens ont pour les causes finales appliquées à la physique, et l'approuve même jusqu'à un certain point ; j'avoue que ce n'est pas sans péril qu'on les introduit : l'erreur où sont tombés des hommes tels que Fermat et Leibniz en les suivant ne prouve que trop combien leur usage est dangereux. On peut cependant dire que ce n'est pas le principe qui les a trompés, c'est la précipitation avec laquelle ils ont pris pour le principe ce qui n'était que des conséquences. On ne peut pas douter que toutes choses ne soient réglées par un Etre suprême, qui, pendant qu'il a imprimé à la matière des forces qui dénotent sa puissance, l'a destinée à exécuter des effets qui marquent sa sagesse ; et l'harmonie de ces deux attributs est si parfaite que sans doute tous les effets de la nature se pourraient déduire de chacun pris séparément. Une mécanique aveugle et nécessaire suit les desseins de l'Intelligence la plus éclairée et la plus libre ; et, si notre esprit était assez vaste, il verrait également les causes des effets physiques, soit en calculant les propriétés des corps, soit en recherchant ce qu'il y avait de plus convenable à leur faire exécuter. Le premier de ces moyens est le plus à notre portée, mais il ne nous mène pas fort loin. Le second quelquefois nous égare, parce que nous ne connaissons point assez quel est le but de la nature, et que nous pouvons nous méprendre sur la *quantité* que nous devons regarder comme sa *dépense* dans la production de ses effets. Pour joindre l'étendue à la sûreté dans nos recherches, il faut employer l'un et l'autre de ces moyens. Calculons les mouvements des corps, mais consultons aussi les desseins de l'Intelligence qui les fait mouvoir (51). »

Encore une fois, en marquant ainsi la position historique de Maupertuis, nous ne prétendons pas préjuger de la valeur de son œuvre sur ce point. Nous souscririons assez volontiers,

de ce biais, au jugement que porte sur cette téléologie, comparée à celle de Leibniz, certains historiens des sciences ou de la philosophie, et entre autres Adolf Kneser (52). Et d'autre part, comme le fait remarquer Planck (53), la forme donnée par Maupertuis à ce principe de *minimum* ne pouvait exprimer le principe de la moindre action tel qu'il doit être effectivement compris. Mais qu'importe ? Si nous renonçons à chercher dans l'histoire de la pensée scientifique la possibilité constante de constructions dialectiques, et, dans le développement historique des idées, un enchaînement rationnel excluant toute contingence, tout écart imprévisible, tout retour plus ou moins brusque, nous pouvons dire que, s'il ne reste à peu près rien maintenant de ce que Maupertuis avait compris d'abord sous cette expression, c'est lui pourtant qui a donné, de façon patente pour ses contemporains, l'impulsion initiale. En attirant de manière spéciale l'attention sur ce point, il a, pour ainsi dire, fourni à l'édifice le premier échafaudage, ce qui n'était par conséquent qu'un assemblage provisoire de matériaux, destiné à disparaître une fois la construction achevée, utile cependant pour en permettre l'exécution.

Nous touchons là, pensons-nous, au point central du problème historique qui nous occupe ; et parce qu'il est particulièrement délicat, il nous paraît opportun de soulever à cette occasion une discussion de méthode, dont dépend, en définitive, la solution adoptée. Il s'agit en effet de distinguer d'une part le point de vue des rapports logiques décelables après coup entre doctrines, qu'il y ait eu ou non influence, et d'autre part le point de vue strictement historique, considérant, à des moments déterminés, les phases successives de développement de telle ou telle théorie, de tel ou tel concept. On peut, du premier point de vue, parler de précurseurs, même lorsque les idées des savants en question n'ont pas été répandues autour d'eux immédiatement dans un cercle plus ou moins large ; mais cela n'empêche pas que, du point de vue plus strictement historique, il reste souhaitable de mettre en lumière les influences effectivement exercées, en précisant les circonstances dans lesquelles elles ont joué. Et, de ce point de vue, même si la courbe de l'évolution ne paraît pas régu-

lière (en faisant intervenir, pour en juger, notre position actuelle qui détermine le sens du progrès), on ne doit en laisser dans l'ombre aucune partie. En d'autres termes, le fait que telle démarche n'a pas marqué un progrès, et a même, pour un temps plus ou moins long, engagé les recherches dans une direction qui s'est montrée stérile, n'est pas une raison pour n'en pas tenir compte ou pour en nier les répercussions.

Ces distinctions une fois établies, on peut tenir pour très vraisemblable que *logiquement* le contenu ultérieur de ce qui a été dénommé principe de la moindre action aurait pu, spécialement chez Euler, se rattacher directement, comme nous le montrerons, à ce que nous venons d'étudier chez Leibniz. Mais *en fait*, c'est à la dénomination proposée par Maupertuis et aux considérations développées par ce savant qu'à tort ou à raison s'est attaché Euler, et que font ensuite allusion Lagrange, Carnot, etc... ; et cela ne peut pas être négligé au point de vue historique (53 *bis*).

Il nous reste à envisager sous un dernier aspect la question de la priorité de Maupertuis, du fait même que le principe de la moindre action a paru présenter quelques analogies avec certaines propositions établies par 's Gravesande. Les textes de ce physicien avec lesquels Koenig invitait à trouver des rapprochements appartiennent à l'*Essai d'une nouvelle théorie sur le choc des corps* (54) et aux *Physices elementa mathematica* (55). La proposition XV de l'*Essai* est ainsi conçue : « La vitesse respective de deux corps étant donnée, la somme de leurs forces est la moindre possible quand leurs directions sont contraires et quand leurs vitesses absolues sont en raison inverse des masses. » Quant à la proposition XVII, elle établit que : « Deux corps restent en repos après le choc, quand avant le choc la somme de leurs forces est la moindre qu'il est possible qu'ils aient, leur vitesse respective étant donnée. » Dans les *Eléments de physique*, le cas du choc de deux corps donnait lieu aux mêmes règles, et celui du choc de trois corps s'y trouvait ramené. En ce cas, il y a deux vitesses respectives. Or « quand les corps restent en repos après le choc, la somme des forces, les vitesses respectives étant données, est la moindre de toutes » et « les vitesses respectives étant données, la force est la moindre de toutes, quand deux corps sont mûs

vers un côté, et un troisième vers un côté opposé, de façon que le produit de la masse de ce dernier corps par sa vitesse vaille la somme des produits des masses des deux autres corps, multipliées chacune par sa vitesse » (56).

Or, en admettant que l'on tire de ces diverses formules cette proposition : que, dans le choc des corps non élastiques, la quantité de force vive qui périt est égale à la plus petite force vive que les mêmes corps pourraient recevoir, la vitesse respective avant le choc demeurant la même, cette proposition « n'est d'aucune importance, de l'avis d'Euler, et n'a pas le moindre rapport au principe de la moindre action. Car, comme il ne s'y agit que de ce qui périt, et qu'en cela même ce n'est pas la plus petite force vive, mais quelque chose qui se réduit à une autre force vive, qui ne peut être prise pour un *minimum* que sous une certaine et particulière considération ; au lieu qu'ici c'est de ce qui est réellement produit qu'il s'agit ; on voit entre les deux une telle différence qu'il n'est pas possible d'en imaginer une plus grande. Et ce que 's Gravesande ajoute du choc de plusieurs corps, partant du même principe, ne fait pas plus à notre affaire. Enfin la force de cette proposition est tellement restreinte, qu'elle n'a lieu que pour les corps non élastiques ; pendant que le principe de la moindre action a la plus grande étendue et n'est sujet à aucune restriction » (57).

Enfin, bien qu'alors la priorité de Maupertuis ne soit plus en jeu, nous devons encore nous demander jusqu'à quel point le principe de la nullité de force vive pouvait apparaître comme susceptible d'englober ou de supplanter celui de la moindre action. Après avoir vivement critiqué ce principe, proposé par Koenig dans son mémoire des *Acta Eruditorum*, et l'avoir présenté comme une sorte de tautologie, d'autant plus vaine qu'elle apporterait avec elle de nouvelles difficultés dans la solution des problèmes, Euler continuait son *Examen de la dissertation de M. le professeur Koenig* par cette comparaison, toute à l'avantage de Maupertuis : « Toute la différence consiste en ce que, par le principe de M. de Maupertuis, on détermine tous les états d'équilibre avec la plus grande facilité, et souvent beaucoup plus vite que par les préceptes reçus de la dynamique ; qu'au contraire, le principe de M. Koenig

non seulement conduit d'ordinaire dans de grandes ambages, mais souvent encore ne saurait être d'aucune application. Et par cette différence extrême de succès, on peut juger de la différence qui se trouve entre les principes (58). »

D'ailleurs le principe de la moindre action « est différent de celui de la nullité de force vive, par deux raisons : parce qu'il s'agit, dans le principe de M. de Maupertuis, non de la nullité, mais de la minimité ; et de plus, parce que dans l'action on fait entrer le temps qui n'entre point dans la force vive. Ce n'est pas que le principe de la nullité de la force vive n'ait lieu aussi dans plusieurs cas, ce n'est pas même qu'on ne puisse tirer, de la nullité de la force vive, plusieurs choses qu'on tire de la minimité d'action ; mais cela ne prouve pas l'identité des deux principes, parce que l'on peut parvenir à la même conclusion par des voies différentes » (59).

Quant aux efforts faits par Koenig pour montrer que, sous l'apparence d'un *minimum* d'action, il s'agit en réalité de la nullité de cette action (ce qui rapprocherait encore le principe de celui de la nullité de la force vive), Euler montre fort clairement ce qu'il en faut penser : « Nous ne faisons pas difficulté d'accorder à M. Koenig que la formule qui exprime la quantité d'action se réduit véritablement à rien, toutes les fois que les circonstances le permettent, comme cela arrive dans les cas qu'il a produits ; mais quand, par des obstacles quelconques, cette réduction à rien ne saurait avoir lieu, comme nous venons de le voir dans la chaînette, alors cette formule devient toujours de la moindre valeur ; comme si la Nature, appliquée à la production de l'effet total, voulait en approcher, autant qu'il lui est permis de le faire ; ce qui suffit pour mettre en évidence, non seulement la vérité de ce principe si fécond, mais encore la raison sur laquelle il est fondé, et pour détruire entièrement les objections de M. Koenig, qui, bien loin de porter atteinte à ce principe, servent merveilleusement à le confirmer. Car c'est faire une difficulté tout à fait vaine à celui qui établit que la moindre quantité d'action a lieu, que de dire qu'il y a des cas où cette quantité s'évanouit entièrement, puisque l'action ne saurait assurément devenir moindre que rien. Cependant cette objection serait de quelque importance, si, dans tout état d'équilibre, la quantité d'action se ré-

duisait à rien, et M. Koenig semble l'insinuer ; mais, tant s'en faut qu'il l'ait prouvé, qu'il y a tout au contraire une infinité de cas, où il est manifeste que la quantité d'action ne devient point nulle, et qu'elle est seulement la plus petite possible ; ce qui a lieu, quand il ne se peut qu'elle devienne absolument nulle. Outre l'exemple de la chaînette, MM. D. Bernoulli et Euler ont démontré que les courbes élastiques de tout genre, et les autres figures que prennent les corps flexibles, lorsqu'étant dans l'équilibre, ils sont sollicités par des forces quelconques, peuvent être trouvées par la méthode *de maximis et minimis,* attribuant, à la formule qui renferme dans chaque cas la quantité d'action, une valeur qui soit la moindre, mais point du tout nulle (60). »

LES OBJECTIONS ANCIENNES AU PRINCIPE DE LA MOINDRE ACTION

Indépendamment des critiques de Martens (61), le principe de la moindre action souleva, à l'époque du débat entre Maupertuis et Koenig, des objections qui, en raison de leurs répercussions et des idées sur la philosophie des sciences qu'elles font apparaître, méritent d'être étudiées d'assez près. D'Arcy fut un des principaux adversaires de ce nouveau principe, qu'il attaqua dans plusieurs mémoires présentés à l'Académie des Sciences de Paris (62).

D'Arcy critiqua d'abord la définition même de *l'action,* et, à ce point de vue, le rapprochement fait par Maupertuis entre sa propre définition de l'action et celle qu'en avaient donnée Leibniz et Wolff (63) excita chez D'Arcy une véritable indignation. Celui-ci protesta « que les autorités ne tiennent jamais lieu de raisons » (64) ; et, assimilant l'attitude de Maupertuis vis-à-vis de Leibniz à celle des scolastiques à l'égard d'Aristote, il s'écria : « Quelle honte pour les hommes ! Quelle indolence ! Ils aiment mieux croire que d'examiner. » Il conclut qu'il fallait abandonner l'idolâtrie, faire abstraction des noms, pour ne considérer que la valeur intrinsèque des œuvres. Mais, au fond de toute cette argumentation, il y a une confusion essentielle ; car, lorsque Maupertuis signale qu'il n'a

pas jugé nécessaire de revenir sur une définition déjà admise par Leibniz et par Wolff, cette constatation d'un accord est loin d'équivaloir à un appel aveugle à l'autorité.

D'ailleurs, lorsque D'Alembert commente le passage de Maupertuis si vivement critiqué par D'Arcy, il remarque que « ces paroles semblent faire connaître que M. de Maupertuis, quoiqu'il croie que l'action peut être représentée par le produit du carré de la vitesse et du temps, croit en même temps qu'on pourrait attacher à ce mot une autre notion » (65). En d'autres termes, Maupertuis n'a pas apporté là une définition qu'il cherche à considérer autrement que comme arbitraire. Et, si à l'égard des partisans des forces vives, elle apparaît malgré tout comme peu conforme à leurs principes, « à l'égard de ceux qui, comme M. de Maupertuis, n'ont point pris de parti dans la dispute des forces vives, on ne peut leur contester la définition de l'action, surtout lorsqu'ils paraissent la donner comme une définition de nom » (66).

D'Arcy pourrait reprendre, il est vrai, la réponse par laquelle il maintint son point de vue contre les remarques de Maupertuis sur cette objection : « On se rejettera peut-être sur ce qu'on entend par action et que, l'ayant défini, l'on est hors d'atteinte. On le serait si on n'en tirait aucune autre conséquence que celle de dire : dans le choc des corps, une telle fonction de la masse, de la vitesse et de l'espace est un minimum ; mais, lorsqu'on dit que la Nature épargne l'action, qu'une intelligence ordonnatrice détermine les effets, de manière à employer le moins de cause possible, l'on entend clairement que cette quantité exprime cette cause ou la force réelle ; et par conséquent, je suis fondé à dire que cette quantité ne peut exprimer l'action, puisque deux actions égales et directement opposées ne se feraient pas équilibre (67). »

Cherchant donc à conserver au contraire à l'action un sens métaphysique, D'Arcy définit l'action d'un système de corps « la puissance de ce système pour produire un effet ; la puissance de deux forces opposées pour produire un effet est la différence de ces forces ; si les forces agissent dans la même direction, c'est leur somme » (68). De même, dans le mémoire de 1749, après avoir défini l'action d'un corps autour d'un point « la masse multipliée par la vitesse et par la perpendi-

culaire tirée de ce point sur la direction des corps » (69), il ajoute : « Cette définition de l'action est parfaitement d'accord avec celle que M. D'Alembert a donnée dans le dictionnaire de l'*Encyclopédie ;* voici ses paroles : l'action est le mouvement qu'un corps produit ou qu'il tend à produire dans un autre corps. » Mais D'Alembert, s'expliquant ailleurs sur le sens à donner à cette définition, prend bien soin de préciser qu'il veut indiquer par là « non la notion métaphysique du mot action, qui est une chimère, mais l'idée qu'on attache vulgairement à ce mot » (70). Aussi dit-il encore ce qu'il pense de la définition de D'Arcy en ces termes : « Je crois qu'on peut adopter également toute autre définition de l'action, par exemple celle que M. D'Arcy en a donnée dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de 1749 et 1752, pourvu (ce qui ne contredit en rien les principes de M. D'Arcy) qu'on regarde aussi cette définition comme une simple définition de nom (71). »

En résumé, il ne paraît guère plausible d'attaquer la définition de l'action proposée par Maupertuis (72), si l'on considère surtout que, malgré le caractère métaphysique du principe de la moindre action, le mot action lui-même n'a pas, par soi, dans ce principe, une valeur métaphysique et ne répond à d'autre soucis qu'à celui de poser une formule mathématique précise permettant des calculs (73).

Après l'exposé et l'examen des critiques apportées par D'Arcy à la définition de l'action, il nous reste à envisager les objections qu'il opposa au principe même de la moindre action.

Les calculs proposés d'abord dans le premier mémoire paraissent bien établis surtout en vue d'amener cette sorte de conclusion concernant l'application du principe au choc des corps : « Au reste, un principe métaphysique n'est pas démontré par son accord en résultat des faits avec des principes qui ne sont pas eux-mêmes métaphysiquement démontrés ; ainsi, quand la quantité que M. de Maupertuis indique pour exprimer l'action lui serait effectivement proportionnelle, quand même la nature, dans ses changements, perdrait le moins possible de cette action, le principe ne serait démontré qu'autant que l'on saurait, avant ce théorème, que lorsque deux corps

marchent l'un vers l'autre avec des vitesses en raison renversée des masses, ils resteront en repos ou retourneront en arrière avec des vitesses dans la même raison des masses après le choc ; et, si on suppose cette vérité connue, l'on n'a nul besoin de l'autre principe pour tous les cas que M. de Maupertuis donne (74). »

Or Maupertuis fit remarquer, dans sa réponse, que l'objection reposait au fond sur une confusion, D'Arcy ne distinguant pas « le changement de la quantité d'action avec le changement des vitesses, qui est le véritable changement arrivé dans la Nature ; et ce sont deux choses fort différentes. Les vitesses des corps peuvent avoir changé, quoique la quantité d'action soit demeurée la même, comme il arrive manifestement dans le choc des corps élastiques. Dans le choc des corps durs, le changement des vitesses n'est ni égal, ni proportionnel au changement arrivé à la quantité d'action » (75).

Après avoir montré sur des exemples comment devait être faite cette distinction, Maupertuis continuait : « On peut faire ici une nouvelle observation, bien propre à prouver que l'action est le fonds que la Nature épargne dans toutes ses opérations. Dans le choc des corps élastiques, il est possible que la quantité d'action demeure la même ; elle la demeure en effet, et la quantité d'action nécessaire pour changer les vitesses, c'est-à-dire pour le changement arrivé dans la nature, est la plus petite qui soit possible. Dans le choc des corps durs, où la quantité d'action ne pouvait demeurer constamment la même, la Nature épargne du moins le plus qu'il est possible l'action nécessaire pour changer leurs vitesses (76). »

« Je crois que, si ce paragraphe peut s'entendre, reprit D'Arcy, après l'avoir cité dans un nouvel examen faisant réplique à la réponse de Maupertuis (77), ce n'est que de la manière dont je vais le considérer. Dans le choc des corps élastiques, l'action demeure la même avant et après ce choc, et la quantité nécessaire pour changer les vitesses est égale à zéro, c'est-à-dire que l'action avant le choc, moins l'action après le choc, est égale à zéro. Dans le choc des corps durs, où la quantité d'action avant le choc n'est pas la même qu'après le choc, la Nature épargne au moins cette action, c'est-à-dire que l'action avant le choc moins l'action après le choc est un

minimum, et nous avons montré que de là on tirait une conclusion absurde. » Cependant cette absurdité n'apparaît qu'à la faveur de la confusion signalée par Maupertuis (78) ; si bien que la question ne se trouve en rien avancée par cette discussion.

Reprenant de son côté l'examen de ce problème, D'Alembert remarque « qu'il est vrai que l'application est ici un peu plus compliquée, plus détournée, moins simple et peut-être moins rigoureuse que dans les cas de réfraction » (79). Mais, bien loin de chercher à écarter cette application, il se contente de proposer quelques corrections pour la rendre plus simple et plus acceptable.

D'abord « il semble qu'on pourrait concilier ou éviter toute difficulté à cet égard en substituant aux mots changement dans la Nature, qui se trouvent dans l'énoncé de la proposition de M. de Maupertuis, les mots changement dans la vitesse ; alors l'équivoque vraie ou prétendue ne subsistera plus ». Puis « au lieu de ces mots : la quantité d'action nécessaire *pour produire* ce changement, on pourrait substituer ceux-ci : la quantité d'action *qui répond* à ce changement, etc... et énoncer ainsi la règle de M. de Maupertuis : Dans le changement qui arrive par le choc *à la vitesse* des corps, la quantité d'action *qui répondra* à ce changement, le temps étant supposé constant, est la moindre qu'il est possible ».

Certes « il est vrai qu'on a trouvé les lois du mouvement sans ce principe ; mais il peut être utile d'avoir montré comment il s'y applique. Il est encore vrai que ce principe ainsi appliqué ne sera et ne peut être que quelque autre principe connu présenté différemment. Mais il en est ainsi de toutes les vérités mathématiques ; au fond, elles ne sont que la traduction les unes des autres. Le principe de la conservation des forces vives, par exemple, n'est en effet que le principe des anciens sur l'équilibre, comme je l'ai fait voir dans ma *Dynamique* (IIe part., chap. IV) ; cela n'empêche pas que le principe de la conservation des forces vives ne soit très utile et ne fasse honneur à ses inventeurs ».

Quant à la loi du repos, D'Arcy prétendit que, dans l'application faite de cette forme du principe de la moindre action au levier, Maupertuis introduisait une supposition « absolu-

ment gratuite » en admettant « que le levier se meut d'un mouvement angulaire constant », puisque, en réalité, à chaque distance d'un des corps au point d'équilibre « l'action ou le temps nécessaire pour lui faire parcourir l'angle constant est différent » (80).

Le sens général de la réponse de Maupertuis fut bien moins une protestation contre une attitude qui lui aurait été gratuitement prêtée, qu'une affirmation de son droit à introduire dans ses calculs certaines suppositions, notamment celle de la constance du mouvement angulaire, le levier étant pris d'abord à l'état de repos et considéré ensuite comme tiré infiniment peu de ce repos.

En considérant cette application faite par Maupertuis de son principe à l'équilibre dans le levier, D'Alembert vit bien, comme D'Arcy le signalait, la nécessité de faire pour cela « certaines suppositions, entre autres que la vitesse est toujours proportionnelle à la distance du point d'appui, et que le temps est constant, comme dans le cas du choc des corps ; il faut supposer encore que la longueur du levier est donnée, et que c'est le point d'appui que l'on cherche ; car, si le point d'appui et un des bras étaient donnés, et qu'on cherchât l'autre, on trouverait par le principe de l'action que ce bras est égal à zéro » (81). Mais, au lieu de tirer de cette remarque la même conclusion que D'Arcy contre la valeur du principe de la moindre action, il ajoutait : « Au reste, les suppositions que fait ici M. de Maupertuis sont permises ; il suffit de les énoncer pour être hors d'atteinte, et toute autre supposition devrait de même être énoncée. »

Là encore nous retrouvons cette opposition fondamentale de point de vue : d'un côté, l'idée que toute supposition plus ou moins arbitraire empêche quelque conclusion positive et ruine tout principe ; car « il serait singulier de faire une supposition gratuite, d'en conclure les lois de la nature et d'être hors d'atteinte, parce qu'on a annoncé la supposition » (82). D'autre part, l'idée beaucoup plus large et plus féconde que la convention peut aider le savant dans sa tâche, sans faire de son œuvre quelque chose de trop fragile pour être scientifique.

Aussi D'Alembert n'hésita-t-il pas à considérer comme atteint le but de Maupertuis, qui « a déterminé le premier par

un seul et même principe les lois du choc des corps durs et des corps élastiques », « ce qui, ajoute-t-il un peu plus loin, est le point capital » (83).

Nous avons vu que Maupertuis avait pour la première fois formulé son principe de la moindre action en vue d'apporter une explication de la réfraction. Or, sur ce point, D'Arcy essaya de montrer que la manière dont Maupertuis employait son principe de la moindre action n'était pas la même que celle dont il s'en servait dans le choc des corps. Et tirant de là un argument contre la généralité immédiate, pour ainsi dire, de ce principe : « Comment donc, continuait-il (84), peut-on penser qu'un principe général puisse prendre des formes si contraires, et par quel moyen pouvons-nous trouver la manière de l'appliquer ? Dans la lumière, c'est l'action avant le changement plus l'action après qui est un minimum ; dans le choc des corps, c'est la masse par la vitesse perdue et par l'espace qui serait parcouru en conséquence de cette vitesse. Il serait, je crois, difficile de rendre compte de ces contradictions et de les concilier sous un même point. »

Assurément l'objection n'était pas dénuée de toute force, surtout, pourrions-nous dire, comme argument *ad hominem ;* car cette nécessité de concilier sous un même point les diverses applications d'un même principe était particulièrement importante dans une explication basée sur la considération des causes finales. Cependant, même en admettant la difficulté, elle pourrait ne pas paraître insoluble du fait que les adaptations du principe à des cas spéciaux ne sont pas à proprement parler des variations de ce principe et n'entament en rien par conséquent son universalité ; disons plutôt seulement son universalisation, pour écarter la conception d'une sorte d'universalité actuelle et immédiate n'impliquant aucune modification, si légère soit-elle, en vue d'une application précise et spéciale du principe général.

D'Alembert, qui ne considérait pas, il est vrai, la question du même point de vue, puisqu'il n'envisageait pas l'intervention des causes finales, fit bien remarquer que le principe se trouvait en défaut dans la réflexion sur les miroirs concaves « car alors le chemin du rayon de lumière est un maximum et l'action est aussi un maximum » ; mais, moins exigeant sur

la fécondité du principe, il ne proposa pas de voir dans cette exception une véritable preuve d'erreur, et ajouta qu' « il n'y en aura pas moins de mérite à avoir appliqué le premier ce principe à la réfraction ; et il en sera comme du principe de la conservation des forces vives qui s'applique au choc des corps élastiques, et qui n'a point lieu dans les corps durs » (85). L'idée a peut-être même d'autant plus de valeur qu'« il n'en est pas moins constant que ce principe de M. de Maupertuis, appliqué à la réfraction, concilie les causes finales avec la mécanique, du moins dans ce cas-là, ce que personne n'avait encore fait » (85).

Si nous avons accordé à ces discussions une certaine attention, c'est qu'elles mettent en relief l'importance que prit alors la question, et qu'en nous donnant l'occasion de préciser l'attitude de D'Alembert et d'autres, elles nous ont permis de restituer l'ambiance et les répercussions immédiates. Ces remarques peuvent être considérées d'autre part comme un commentaire anticipé des références à D'Arcy que nous ne tarderons pas à rencontrer chez Lagrange.

Pour les mêmes raisons, nous ajouterons ici quelques mots sur un principe proposé par Gaspard de Courtivron (86), à la même époque et sous l'influence de préoccupations tout à fait analogues à celles qui avaient guidé Maupertuis : même désir d'unification des lois de la mécanique, même souci de mettre en accord cette science avec certaines exigences métaphysiques. « Je me propose, précisait l'auteur dans un mémoire à l'Académie des Sciences (87), de faire voir l'observation constante d'un nouveau principe, qui, indépendamment de l'utilité qu'il peut avoir pour des solutions de problème, montre un rapport entre les questions de statique et de dynamique, qui m'a paru satisfaisant pour ceux qui s'attachent aux considérations métaphysiques (88). »

L'énoncé de ce principe général est « que, de toutes les situations que prend successivement un système de corps animés par des forces quelconques, et liés les uns aux autres par des fils, des leviers ou par tel autre moyen qu'on veuille supposer, celle où le système a la plus grande somme de produits des masses par les carrés des vitesses, c'est-à-dire la plus

grande force vive, est la même situation que celle où il le faudrait placer en premier lieu pour qu'il restât en équilibre.

« La métaphysique générale de ce principe est assez simple ; une quantité variable quelconque, qui croît par degrés infiniment petits, devient la plus grande dans le même instant où elle cesse d'augmenter, c'est-à-dire où son accroissement et par conséquent sa cause sont zéro. Or un système de corps dont la force entière augmente continuellement parce que les résultats des pressions agissantes font accélération aura atteint son maximum de force, lorsque la somme des pressions sera nulle, comme il arrive lorsqu'il a pris la situation que demande l'équilibre » (89).

Afin de rendre ce raisonnement « péremptoire », et pour ne pas se contenter de donner ainsi satisfaction aux partisans des forces vives, G. de Courtivron développait ses idées par l'examen de différents cas dans lesquels son principe trouvait une application féconde. Sans le suivre dans ses démonstrations, nous nous bornerons à signaler que, parmi les applications ainsi faites, la seconde concernait un des problèmes considérés également par Euler dans les développements de celui de la chaînette, et pour lesquels, comme nous le verrons, il se servait du principe de la moindre action.

Deux études critiques parues encore dans la seconde moitié du XVIIIe siècle méritent d'être au moins signalées, sinon de retenir vraiment notre attention ; ce sont, par ordre de dates, celle de Tetens et celle de Bonfioli.

Dans l'introduction de sa dissertation (90), Tetens, qui d'ailleurs reconnaît explicitement, notons-le en passant, la priorité de Maupertuis, formule, à l'égard du principe de la moindre action, deux desiderata, pour que puisse, suivant son expression, lui être conféré « droit de cité dans la philosophie naturelle ». Tout d'abord, il conviendrait, à son avis, que l'universalité du principe en question ne soit pas affirmée sans démonstrations convaincantes (ce qui, bien évidemment, implique qu'il ne considérait pas comme telles celles de Maupertuis) ; ensuite il faudrait établir que la moindre action est bien, en philosophie naturelle, « de la maison » et non pas postulée en partant de raisons métaphysiques. On voit com-

ment, sur ce second point, Tetens s'opposait non seulement aux conclusions, mais à la méthode même de Maupertuis.

Reprenant donc à sa manière le problème, Tetens, après avoir retrouvé par ses démonstrations un *minimum quid,* s'efforce de l'expliquer en le faisant dépendre de principes plus fondamentaux, selon lui, que celui de la moindre action ; à savoir celui de l'uniformité dans le mouvement, ou celui de l'égalité de l'action et de la réaction. Il lui arrive même, au cours de ses calculs, de se référer parfois au principe du plus court chemin et à celui de la nullité des forces vives (proposé, comme nous l'avons vu, par Koenig). Nous ne pensons pas devoir nous arrêter plus longuement à l'examen de ce mémoire, qui n'a pas eu, semble-t-il, de grandes répercussions.

On pourrait, en raison au moins de la date, s'attendre à trouver dans le mémoire de Bonfioli (91), une discussion plus profonde ; et l'on est étonné de ne pas y voir l'auteur tirer parti des travaux de Lagrange. Le début de cette étude est consacré à l'usage des causes finales dans les explications scientifiques et aux limites dans lesquelles il convient de maintenir la recherche de telles causes. Après avoir discuté quelques opinions, Bonfioli indique l'avis auquel il se range. On doit, d'après lui, ne rien admettre des principes finalistes au point de départ, et ne pas leur demander de diriger les recherches portant sur des objets nouveaux ; par contre, leur emploi présente de grands avantages, lorsqu'il s'agit de suivre l'ordre des choses déjà connues et d'y retrouver l'action admirable et la divine sagesse de l'Auteur de la nature.

Il oppose cette façon de procéder à la manière audacieuse de ceux qui veulent, dans les questions de physique, prendre pour point de départ les principes téléologiques, estimant que, dans la recherche de la vérité, toute lumière certaine fait défaut, dès que sont écartées de telles considérations. C'est dans ces audacieux que Bonfioli range Maupertuis, étant donné que le principe de la moindre action est présenté par celui-ci comme « si certain et si universel que de là, comme d'une très abondante source, il a voulu que soient déduites nécessairement toutes les connaissances des choses naturelles » (92). Après un bref résumé des idées de Maupertuis, l'auteur passe

à leur examen ; et, pour discuter avec méthode l'opinion envisagée, il distingue deux questions.

Avant de dire quelques mots de chacune d'elles, nous croyons opportun de faire tout d'abord remarquer qu'à plusieurs reprises, au cours de la discussion, Bonfioli fait des rapprochements avec Leibniz, notamment en ce qui concerne la notion même d'action. « Maupertuis, en conclut-il (93), n'a donc rien apporté de nouveau, lorsqu'il a posé que *mvs* mesure l'action de la puissance ; et certes, il n'eût pas présenté cela comme quelque chose de nouveau, s'il eût connu quelle avait été en cette matière l'opinion de Leibniz » ; et plus loin il ajoute : « On peut donc facilement soupçonner que notre auteur a été à son insu et malgré lui entraîné dans l'opinion de Leibniz (94). » En réalité Bonfioli semble avoir assez mal compris la pensée leibnizienne, en croyant trouver la formule de l'action, dans des textes où Leibniz a en vue les forces vives (95), tandis que n'est presque pas utilisée par le critique de Maupertuis la documentation invoquée par Koenig. Sans doute prétendait-il ainsi rendre ses conclusions indépendantes des discussions soulevées autour de l'argumentation de Koenig, et établir le leibnizianisme de Maupertuis sans prendre parti, du moins ostensiblement, dans la fameuse querelle. Il n'en reste pas moins que, de la sorte, il a mal prouvé la solidité de sa position, et que son argumentation laisse prise à la critique.

En ce qui concerne la mesure de l'action, Bonfioli doute que, de ce que l'action augmente en raison de la masse, de la vitesse et de l'espace, il s'ensuive, comme le pose Maupertuis, que ce soit en raison simple directe, et non selon quelque autre raison. En outre pourquoi, se demande-t-il, ne pas faire intervenir la puissance, ni le temps ? En somme, il n'est pas du tout prouvé, et peut-être même impossible à prouver, d'après lui, qu'on soit en droit d'évaluer l'action par *mvs*. Quand on voit Bonfioli trouver de plus quelque ambiguïté dans la notion d'espace utilisée par Maupertuis, on s'explique certaines de ses questions ; sans que l'on soit pour cela convaincu qu'il ait été autorisé et amené à juste titre à les poser par le seul examen des calculs de Maupertuis. Quoi qu'il en soit, par un recours à Jacques et Vincent Riccati (96), pour

pénétrer plus profondément dans la nature de l'action, Bonfioli en arrive à considérer qu'il faut tenir compte en certains cas de la puissance (*potentia*).

A cette critique de la notion d'action, Bonfioli ajoute (et c'est là le second point essentiel de sa dissertation) des critiques concernant l'usage du principe de la moindre action. Se contentant de signaler l'application qu'en a faite Euler au mouvement des corps lancés (97), il s'attaque seulement à celles que Maupertuis en a tentées en étudiant l'équilibre et le choc des corps. Finalement, il retient que le *minimum* de Maupertuis, quand il s'agit de chocs, exprime la force vive perdue dans le choc. On voit comment il revient par là à 's Gravesande interprété par Koenig.

Somme toute, tant chez Bonfioli que chez Tetens, on ne trouve guère d'arguments vraiment nouveaux, mais bien plutôt, sous un aspect parfois assez différent, il est vrai, des remarques déjà développées ou annoncées chez d'autres critiques. Quant aux conclusions positives, elles ne font à peu près pas progresser la question, et n'apportent pas aux calculs d'éléments féconds, tels que ceux que nous allons rencontrer chez Euler et chez Lagrange.

NOTES

(1) Nous renvoyons, sur ce point, à notre ouvrage consacré à *Maupertuis, Etude biographique,* 1 vol. in-8, Paris, Hermann, 1929.

(2) Il a pour titre : *Accord de différentes lois de la nature qui avaient jusqu'ici paru incompatibles.*

(3) Voir *Unicum opticæ, catoptricæ et dioptricæ principium* (*Acta Eruditorum,* 1682, p. 185 et sq.).

(4) *Mémoires de l'Académie des Sciences,* 1744, p. 571-572. Nous citons ces mémoires d'après l'édition in-12 d'Amsterdam. Il est inutile d'insister ici sur l'erreur physique qui se trouve au fond de telles explications. Nous savons aujourd'hui que, tout au contraire, la lumière va moins vite dans les milieux plus denses. Notons, d'ailleurs, que tout ce que l'on disait alors à ce sujet ne pouvait être, à défaut de contrôle expérimental, que purement théorique.

(5) Il le dit lui-même nettement : « Lorsque nous lûmes le mémoire précédent dans l'Académie royale des Sciences de Paris, nous ne connaissions ce que Leibniz avait fait sur cette matière que par ce qu'en a dit M. de Mairan dans son mémoire sur la réflexion des corps, *Mémoires de l'Académie de Paris,* 1723. Nous avions confondu comme

lui ce sentiment de Leibniz avec celui de Fermat. » (*Œuvres* IV, p. 23).

Il n'acquit, sur ce point, des idées plus exactes que lorsque Euler en fit un examen plus approfondi dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin,* tome VII (1751). Leibniz, précisait Euler, « commence par nier que la nature affecte, soit la route la plus courte, soit celle du moindre temps ; mais prétend qu'elle choisit la route la plus facile, qu'il ne faut confondre avec aucune des deux. Or, pour estimer cette route la plus facile, c'est la résistance avec laquelle les rayons de la lumière traversent les milieux diaphanes qu'il considère ; et il suppose cette résistance différente dans les différents milieux. Il établit même, ce qui paraît favoriser l'opinion de Fermat, que dans les milieux les plus denses, comme l'eau et le verre, la résistance est plus grande que dans l'air et les autres milieux plus rares. Cela supposé, il considère la difficulté que trouve un rayon, lorsqu'il traverse quelque milieu, et estime cette difficulté par le chemin multiplié par la résistance. Il prétend que le rayon suit toujours cette route dans laquelle la somme des difficultés ainsi évaluée est la plus petite ; et par la méthode *de maximis et minimis,* il trouve la règle que l'expérience a fait connaître. Mais, quoique cette explication au premier coup d'œil semble s'accorder avec celle de Fermat, elle est cependant ensuite interprétée avec une subtilité si merveilleuse, qu'elle lui est diamétralement opposée, et qu'elle s'accorde avec celle de Descartes. » Un examen plus approfondi de cette question nous entraînerait hors des limites que nous voudrions conserver à ce travail. Nous ne tarderons pas d'ailleurs à en retrouver quelques points lorsque nous aurons à discuter, avec Euler, les droits respectifs de Leibniz et de Maupertuis à la priorité dans la découverte du principe de la moindre action.

(6) *Mémoires de l'Académie des Sciences,* 1744, p. 573.

(7) Note ajoutée au Mémoire de 1744 dans l'édition des *Œuvres,* IV, p. 17.

(8) *Œuvres,* IV, p. 36. La définition est donnée encore, exactement dans les mêmes termes, dans l'avant-propos de l'*Essai de cosmologie* (*Œuvres,* I, p. XXII) et aussi dans cet *Essai* (*Œuvres,* I, p. 42), de même encore que dans la *Lettre X* (*Œuvres,* II, p. 273-274).

(9) *Essai de Cosmologie.* Avant-propos (*Œuvres,* I, p. XXXIV).

(10) De fait, « M. Wolff, dans les *Mémoires de l'Académie de Pétersbourg,* tome I, a imaginé, nous apprend d'Alembert, de multiplier la force vive par le temps et il a appelé ce produit action... Nous pourrons, en attendant, admettre comme une définition de nom arbitraire cette idée de l'action ; et nous remarquerons d'abord qu'elle revient au même que celle de M. de Maupertuis. Car le produit de l'espace par la vitesse est la même chose que le produit du carré de la vitesse par le temps. » (*Encyclopédie,* art. *Cosmologie.*)

(11) *Mémoires de l'Académie des Sciences,* 1744, p. 575.

(12) *Les lois du mouvement et du repos déduites d'un principe métaphysique* (*Mémoires de l'Académie de Berlin,* 1746, p. 267 et suiv.). Notons la qualification de métaphysique donnée ici explicitement au principe de la moindre action.

(13) Sur la question des corps durs, fort débattue au XVIII[e] siècle, nous renvoyons à notre ouvrage sur *Maupertuis. L'œuvre et sa place dans la pensée scientifique et philosophique du* XVIII[e] *siècle,* Paris, Hermann, 1929. Fondamental à ce sujet est le *Discours sur les lois de la communication du mouvement,* présenté à l'Académie des Sciences de Paris en 1726 par Jean Bernoulli (*Opera omnia,* Lausanne et Genève, 1742, III, p. 8 et suiv.).

(14) Nous ne pouvons nous étendre ici sur les nombreux travaux consacrés à ce problème, tant à la fin du XVII[e] qu'au début du XVIII[e] siècle. Nous renvoyons encore, sur ce sujet, à notre ouvrage sur *Maupertuis.* On trouvera aussi d'utiles renseignements dans les deux intéressantes études de Paul Mouy, *Les lois du choc des corps d'après Malebranche,* Paris, 1927, et *Le développement de la physique cartésienne,* 1646-1712, Paris, 1934.

(15) *Mémoires de l'Académie de Berlin,* 1746, p. 293. Sur les forces vives et la conservation des forces vives, question également fort débattue au XVIII[e] siècle, voir notre *Maupertuis,* Paris, Hermann, 1929.

(16) Béguelin a consacré toute la dernière partie de ses *Recherches sur l'existence des corps durs* (*Mémoires de l'Académie de Berlin,* 1751, p. 346 et suiv.) à montrer la fécondité du principe de la moindre action pour l'explication du mouvement des corps durs ; il instituait notamment pour cela un parallèle entre ce principe et celui de la conservation des forces vives.

(17) De ce dernier, voir notamment : *Projet d'une nouvelle mécanique,* 1687 ; *Solution d'un problème de statique avec la manière d'en résoudre une infinité d'autres de la même espèce* (*Mémoires de l'Académie des Sciences,* 1714), et aussi l'ouvrage posthume, *Nouvelle mécanique,* 2 vol., in-4, Paris, 1725.

(18) *Mémoires de l'Académie des Sciences,* 1740, p. 244.

(19) *Op. cit.,* p. 247.

(20) Euler ne devait pas tarder non plus à insister sur ce point (voir ses *Recherches sur les plus grands et plus petits qui se trouvent dans les actions des forces* in *Mémoires de l'Académie de Berlin,* 1748, p. 147 et suiv., et *Réflexions sur quelques lois générales de la nature qui s'observent dans les effets des forces quelconques, op. cit.* p. 189 et suiv.).

(21) Euler, en étudiant ces cas, trouva qu'ils sont seulement ceux dans lesquels l'équilibre ne se rétablit pas quand il est troublé (*Mémoires de l'Académie de Berlin,* 1751, p. 194 et suiv.).

(22) *Mémoires de l'Académie de Berlin,* 1746, p. 286-287.

(23) Avant-propos de l'*Essai de cosmologie* in *Œuvres* I, p. XXXV. Il se contenta d'ajouter dans ses *Œuvres,* à la suite de la reproduction du mémoire de 1740, une *Addition,* dans laquelle la formule de cette loi du repos se trouvait légèrement transformée : « Soit un système de corps qui pèsent ou qui soient attirés vers des centres par des forces qui agissent chacune sur chacun comme des fonctions quelconques de leurs distances aux centres ; pour que tous ces corps demeurent en repos, il faut que la somme des produits de chaque masse par l'intensité de sa force et par l'intégrale de chaque fonction multipliée par l'élément de la distance au centre (qu'on peut appeler

la somme des forces du repos) fasse un minimum. » (*Œuvres,* IV, p. 64).

(24) *Op. cit.* in *Mémoires de l'Académie de Berlin,* 1751, p. 176. « Ainsi, continuait-il, suivant le sentiment de M. de Maupertuis, on est autorisé de dire que, tant dans le mouvement que dans le repos, la quantité d'action est toujours la moindre qu'il est possible. »

(25) *Op. cit.* in *Mémoires de l'Académie de Berlin,* 1751, p. 181-182. Euler, dans son mémoire *Sur le principe de la moindre action,* insistait encore sur cette identité. « Ces deux principes sont donc si intimement liés l'un à l'autre qu'on peut plutôt les regarder comme un seul ; et, comme le principe du mouvement suit clairement du principe de l'équilibre, de même le principe du mouvement, ou de la moindre action, se peut appliquer à tous les cas de l'équilibre. Ainsi toutes les sciences qu'on a coutume de comprendre sous le nom de mécanique, soit qu'on s'y propose l'équilibre, soit qu'on s'y propose le mouvement, sont tellement fondées sur ce principe, qu'on les en peut fort fertilement et fort parfaitement déduire. » (*Mémoires de l'Académie de Berlin,* 1751, p. 218).

(26) Aussi était-ce à cette démonstration que s'attachait Euler, non seulement dans le mémoire auquel nous empruntons ces idées, mais dans son *Essai d'une démonstration métaphysique du principe général de l'équilibre,* où se trouvait établie la règle « que la somme de tous les efforts auxquels un corps en équilibre est assujetti, est un minimum » (*Mémoires de l'Académie de Berlin,* 1751, p. 253).

(26 *bis*) J. H. Lambert (*Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung,* II, 2, Berlin, 1770) trouve (spécialement p. 547) qu'il y a quelque obscurité dans l'expression action *nécessaire* pour ce changement.

(27) Maupertuis, *Œuvres,* IV, p. 36.

(28) Maupertuis, *Lettre X* (*Œuvres,* II, p. 273).

(29) Son argumentation se trouve dans un article des *Acta eruditorum* de mars 1751 (*De universali principio æquilibrii et motus, in vi viva reperto, deque nexu inter vim vivam et actionem, utriusque minimo*), dans un *Appel au public* (1 vol. in-8, Leyde, 1752), dans une *Défense de l'appel au public* (1 vol., 1752) et dans un *Recueil d'écrits sur la question de la moindre action* (1 vol. in-8, Leyde, 1752).

(30) Reproduite dans les *Leibnizens mathematischen Schriften* (édition Gerhardt, 4 vol., Halle, 1859).

(31) Willy Kabitz, *Ueber eine in Gotha aufgefundene Abschrift des von S. Koenig in seinem Streite mit Maupertuis und der Akademie veröffentlichen seiner Zeit für unecht erklärten Leibniz-briefes* (*Sitzungsberichte der Königl. Preussischen Akademie der Wissenschaften,* 1913, p. 632-638).

(31 *bis*) On peut fort bien voir là une allusion claire à la 1re partie du *Specimen dynamicum pro admirandis naturæ legibus circa corporum vires et mutuas actiones detegendis et ad suas causas revocandis,* effectivement parue dans les *Acta Eruditorum* de 1695.

(32) *Zur Geschichte des Princips der Kleinsten Action* (*Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin,* 10 mars 1887). Cette étude est reproduite dans les *Wissenschaftliche Abhandlungen*

von Hermann von Helmholtz, 3 Bd., III, Leipzig, 1895, p. 249 et suiv.

(33) Année 1751. Certains passages en ont été insérés dans les *Œuvres* de Maupertuis, IV, pp. 23-28.

(34) Dans le cas de la lumière, Leibniz suppose cependant qu'elle accroît sa vitesse à mesure que s'accroît la résistance des milieux traversés par elle, « ce qui, remarque Euler, est assurément un insigne paradoxe. Or, voici comment il s'y prend pour le soutenir. Il dit qu'une plus grande résistance empêche la diffusion des rayons, au lieu que les rayons se dispersent davantage là où la résistance est moindre ; et que, la diffusion étant empêchée, les rayons resserrés dans leur passage, tels qu'un fleuve qui coule dans un lit plus étroit, en acquièrent une plus grande vitesse ».

(35) *De ipsa natura sive de vi insita actionibusque creaturarum* (*Acta eruditorum*, 1698, sept., p. 432).

(36) *Nouveaux essais*, livre IV, chap. 7 (*Œuvres philosophiques*, éd. Paul Janet, 2 vol. 2e éd., Paris, 1900, tome I, p. 386). Rappelons que cet ouvrage, écrit en 1704, a été publié pour la première fois par Raspe en 1765.

(37) *Œuvres*, I, p. XXIII.

(38) *Encyclopédie*, art. *Cosmologie*. Maupertuis lui-même invite à ne pas confondre son principe « avec le vieil axiome d'Aristote : que la nature dans ses opérations ne fait rien en vain et cherche toujours le meilleur » (*Essai de cosmologie*, Avant-propos, *Œuvres*, I, p. XXX). Mêmes remarques encore dans le mémoire d'Euler *Sur le principe de la moindre action* (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1751, p. 200).

(39) *Dissertation sur le principe de la moindre action, avec l'examen des objections du prof. Koenig faites contre ce principe*, Leyde, 1753, p. 2.

(40) *Op. cit.*, p. 3-4.

(41) *La logique de Leibniz d'après des documents inédits*, Paris, 1901.

(42) *Op. cit.*, p. 230, note 2.

(43) *Op. cit.*, p. 231.

(44) *Das Prinzip der kleinsten Wirkung von Leibniz bis zur Gegenwart*, Leipzig, 1928.

(45) Voir Adolf Kneser, *Op. cit.*, pp. 10-15.

(46) Sur l'histoire du calcul des variations, on peut consulter, outre l'ouvrage de I. Todhunter, *A History of the Progress of the Calculus of Variations during the nineteenth Century*, Cambridge, 1861, les études suivantes : Anton (Ludvig), *Geschichte des isoperimetrischen Problems ; eine geschichtliche Darstellung der Variationsrechnung von Bernoulli bis Lagrange*, Dresden, 1888 ; Choisy (Jacques-Denis), *Essai historique sur le problème des maximums* (sic) *et minimums et sur ses applications à la mécanique*, Genève, 1823 ; Guiraudet (A. E. P.),*Aperçu historique sur l'origine et les progrès du calcul des variations jusqu'aux travaux de Lagrange*, Lille, 1862 ; Kneser (Adolf), *Euler und die Variationsrechnung* (*Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, XXV, Leipzig, 1907) ; Gräffe (H.) *Commentatio historiam calculi variationum inde ab origine calculi differentialis atque integralis usque ad nostra tempora complectens*, Göttingen,

1825 ; Giesel (F.), *Geschichte der Variationsrechnung,* I. Theil, Torgau, 1857.

(47) *La logique de Leibniz,* p. 230-231. Pour le texte du *Tentamen,* voir éd. Gerhardt, *Phil.* VII, 272-273.

(48) Nous insistons à ce propos sur une règle qui nous paraît devoir être adoptée quand il s'agit de questions de priorité. Nous en empruntons la formule à Arago, qui, à juste titre, avait déjà attiré l'attention sur ce point. « Il n'y a qu'une manière rationnelle et juste d'écrire l'histoire des sciences : c'est de s'appuyer exclusivement sur des publications ayant date certaine ; hors de là tout est confusion et obscurité. » (*Sur la prise de possession des découvertes scientifiques,* Œuvres complètes, éd. Barral, Tome XII, p. 60).

(48 *bis*) *Œuvres,* I, p. XXVI.

(49) *Œuvres,* I, p. XIV.

(50) Non seulement Leibniz ne se soucie pas qu'on obtienne un *maximum* ou un *minimum ;* mais il fait intervenir comme pouvant, à son avis, tenir lieu du principe de perfection, un autre principe « qui porte qu'à défaut du moindre, il faut se tenir au plus déterminé, qui pourra être le plus simple, lors même qu'il est le plus grand. » (éd. Gerhardt, *Phil.* VII, 274). L'idée se retrouve d'ailleurs à plusieurs reprises affirmée de façon nette. Leibniz se propose en effet de montrer « comment dans la voie des causes finales, comme dans le calcul des différences, on ne regarde pas seulement au plus grand ou au plus petit, mais généralement au plus déterminé ou au plus simple. » (*Tentamen,* éd. Gerhardt, *Phil.* VII, 270). Quelques lignes plus haut, on lit de même : « Dans la recherche des causes finales, il y a des cas où il faut avoir égard au plus simple ou plus déterminé, sans distinguer si c'est le plus grand ou le plus petit. »

(51) C'est cette position téléologique qui fut ensuite attaquée avec une vigueur particulière. On lit dans les *Principes des sciences mathémathiques* (Paris, 1811) du marquis A. J. Fr. de Fortia d'Urban (p. 310-311) : « Le principe de la moindre action ne doit point être érigé en cause finale ; et loin d'avoir donné naissance aux lois du mouvement, il n'a pas même contribué à leur découverte, sans laquelle on disputerait encore sur ce qu'il faut entendre par la moindre action de la nature. Rien n'est plus dangereux que d'appliquer les raisonnements admis par les métaphysiciens, dans les sciences soumises à des principes aussi sévères que les mathématiques, où la vérité ne craint point les formes les plus austères et repousse tout ornement étranger. »

(52) A. Kneser, *Op. cit.,* p. 27-28.

(53) *Physikalische Rundblicke,* 1922, p. 112.

(53 bis) Dans une *Note sur le principe de la moindre action,* mise en appendice à son ouvrage, *Dynamique et métaphysique leibniziennes,* Paris, 1934, M. Guéroult, après avoir envisagé le problème de priorité en ce domaine, fait reposer sa conclusion sur une distinction entre le point de vue scientifique et le point de vue philosophique. « En se plaçant au point de vue scientifique, écrit-il (p. 235), les adversaires de Maupertuis n'avaient pas tort de se référer à Leibniz pour chercher dans l'union des principes de la simplicité des voies

et du calcul *de minimis et maximis* la genèse du principe d'épargne sous sa forme universelle et mathématique ; d'autant plus que Maupertuis se faisait illusion sur la valeur et la portée de sa découverte. — Au point de vue philosophique, au contraire, on comprend combien était justifié le sentiment qu'éprouvait Maupertuis d'avoir apporté quelque chose de nouveau. Pour poser son principe, il devait en effet ruiner à la fois la physique et la métaphysique de Leibniz, en lui opposant dans un faisceau original les objections de Huygens, les thèses physiques de Newton, les opinions scientifiques et les concepts métaphysiques de Malebranche, le tout enveloppé dans une formule unique, qui fournissait, en même temps qu'une unité des lois du mouvement, une argumentation nouvelle en faveur de l'existence de Dieu et sa providence. »

Pour ingénieuse et intéressante à certains points de vue que soit cette distinction, elle semble bien être à la fois trop nette et quelque peu artificielle. Sans qu'il nous soit possible de la discuter ici (car nous serions par là même entraîné à reprendre l'examen des rapports existant entre les conceptions scientifiques de Leibniz et sa philosophie), de brèves remarques nous paraissent s'imposer. D'abord n'est-il pas vrai que le principe de la simplicité des voies avait, chez Leibniz, au moins autant, sinon plus, de signification philosophique que de valeur scientifique ? Inversement, la ruine de la physique leibnizienne pouvait-elle s'opérer sur le plan strictement philosophique ? Si l'on tenait néanmoins à conserver cette distinction entre le point de vue scientifique et le point de vue philosophique, on pourrait avec plus de vraisemblance soutenir que Maupertuis a plus emprunté à Leibniz dans le domaine philosophique que dans le champ scientifique ; car il est certain que c'est à lui qu'il doit, en partie au moins, ses vues téléologiques et surtout sa conception du rôle heuristique des causes finales ; tandis qu'au contraire la façon dont il fait du principe de la moindre action une loi d'épargne ne prolonge pas exactement l'esprit du calcul des maxima et minima tel que le pratiquait Leibniz. En ce qui concerne cette méthode mathématique, celui-ci devançait et annonçait bien plus Euler que Maupertuis. D'ailleurs, rappelons-le, cette constatation n'a pas, du point de vue historique, la valeur d'un argument en faveur de la priorité de Leibniz dans l'énoncé du principe de la moindre action.

(54) Publié dans le *Journal Littéraire de La Haye*, tome 12.

(55) Ces *Physices elementa mathematica experimentis confirmata sive introductio ad philosophiam newtonianam* parurent en deux volumes in-4°, à Leyde, 1720-1721. Ils furent traduits en français par Elie de Joncourt, 2 vol. in-4°, Leyde, 1746, et par Roland de Virloys, 2 vol. in-8°, Paris, 1747. Sur cet ouvrage et son influence en France, voir notre étude sur *Les Physiciens hollandais et la méthode expérimentale en France au XVIIIe siècle*, 1 vol. gr. in-8, Paris, 1926 (Libr. Herman).

(56) Trad. Elie de Joncourt, I, p. 313-14.

(57) *Sur le principe de la moindre action* in *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1751, p. 213.

(58) *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1751, p. 225.

(59) D'Alembert art. *Cosmologie* dans l'*Encyclopédie.*

(60) Traduction du rapport latin lu à la séance du 13 avril 1752 in *Mémoires de l'Académie de Berlin,* 1750, p. 53-54. Sur l'application du principe de la moindre action au problème de la chaînette, aux courbes élastiques, etc.., voir plus loin ce que nous dirons du principe de la moindre action chez Euler.

(61) Il fit paraître à Amsterdam, en 1752, des *Remarques sur la loi de l'épargne dont on fait à présent tant de cas et que M. de Maupertuis tâche d'introduire...* On y peut lire (p. 19) : « Aussi ne pouvons-nous déterminer les effets du choc des corps durs de la même manière que M. de Maupertuis tâche de le faire ; car de cette manière on suppose que la règle de la moins possible quantité d'action a lieu aussi bien dans le choc des corps durs que dans celui des corps mous, ce qui n'est pas prouvé. » Et un peu plus loin : « On n'a pas besoin de poser pour fondement la moindre quantité d'action possible pour trouver les effets du choc des corps élastiques d'une manière intelligible. » (p. 27). S'attaquant également à une autre application du principe, Martens poursuivait : « M. de Maupertuis prétend aussi prouver la généralité et la fécondité de son principe de la moindre quantité d'action possible pour opérer quelque changement dans la nature, par l'équilibre, qu'il nomme la loi du repos des corps, et il se sert à cette fin de son troisième problème dans lequel il propose deux corps attachés à un levier supposé immatériel, et il cherche le point d'équilibre, selon une déduction de la moindre quantité d'action possible. Il l'acquiert aussi réellement par cette voie. Mais derechef s'ensuit-il de là que la moindre quantité d'action possible en soit le vrai principe, et non quelque autre dont nous parlerons dans l'instant. » (p. 37). Nous nous contenterons de ces quelques citations, sans insister plus sur ce volume ; nous bornant à rapporter toutefois cette appréciation sur ces *Remarques :* « Il m'a semblé (*Histoire des Mathémathiques* de Montucla, III, p. 654) qu'elles sont fort indifférentes au principe de M. de Maupertuis ; car, ne contestant point ses calculs, il se borne presque à le chicaner sur le nom qu'il donne à sa loi de principe de la nature. Il est enfin difficile de voir quel est l'objet de M. Martens et quelle est la conséquence qu'il entend tirer de son examen. »

(62) D'Arcy, *Réflexions sur le principe de la moindre action de M. de Maupertuis* (*Mémoires de l'Académie des Sciences,* 1749). — *Réplique à un mémoire de M. de Maupertuis sur le principe de la moindre action* (*Mémoires de l'Académie des Sciences,* 1752).

(63) Maupertuis l'indiqua d'abord dans une *Réponse* au premier mémoire de D'Arcy qu'il inséra dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin,* 1752. Il se réfère à un mémoire, publié par Wolff dans le tome I des *Commentaires de l'Académie impériale de Saint-Pétersbourg* (année 1726), dans lequel on trouve en effet : « Donc les actions sont en raison composée des masses, des vitesses et des espaces. » Dans les inédits de Leibniz publiés par Gerhardt, Louis Couturat a relevé des textes tout aussi explicites (voir *La logique de Leibniz,* p. 580, note 4).

(64) *Mémoires de l'Académie des Sciences,* 1752, p. 769.

(65) *Encyclopédie* art. *Cosmologie.*

(66) *Encyclopédie* art. *Force.*

(67) *Mémoires de l'Académie des Sciences,* 1752, p. 767. La démonstration présentée en 1749 par D'Arcy consiste en effet à donner un exemple, dans lequel, d'après le principe de Maupertuis et sa définition de l'action, « deux quantités d'action différentes produiraient le même effet » et inversement.

(68) *Op. cit.*, p. 781.

(69) *Mémoires de l'Académie des Sciences,* 1749, p. 778. En posant cette quantité comme constante et en faisant de cela un principe, « il en a fait même une espèce de principe métaphysique, qu'il appelle la conservation de l'action, pour l'opposer, ou plutôt pour le substituer à celui de la moindre quantité d'action ; comme si des dénominations vagues et arbitraires faisaient l'essence des lois de la nature, et pouvaient, par quelque vertu secrète, ériger en causes finales de simples résultats des lois connues de la mécanique. » (Lagrange, *Mécanique analytique,* Paris, 1788, p. 187.) Lagrange ne dénie d'ailleurs pas toute valeur au principe de D'Arcy ; il fait même remarquer que, sous sa première forme (dans les *Mémoires de l'Académie* de 1747), le principe de D'Arcy « est une généralisation du beau théorème de Newton, sur les aires décrites en vertu de forces centripètes quelconques » (*Op. cit.*, p. 186).

(70) *Encyclopédie* art. *Force.*

(71) *Encyclopédie* art. *Force.*

(72) « Les prétentions de M. D'Arcy sur les idées qu'on doit joindre nécessairement au terme action sont donc vaines, conclut également Bertrand dans son *Examen des réflexions de M. D'Arcy sur le principe de la moindre action ;* et, quand il aurait mieux réussi à les faire valoir, il n'aurait point du tout prouvé que M. de Maupertuis a eu tort de nommer action ce qu'il a nommé action ; chaque philosophe étant libre d'attacher à un mot l'idée qu'il lui plaît, pourvu qu'il le fasse de manière qu'il n'y ait pas à craindre d'équivoque. » (*Mémoires de l'Académie de Berlin,* 1753, p. 313).

(73) « A quoi nous ajouterons que, quand il regarde l'action envisagée sous ce point de vue comme la dépense de la nature, ce mot de dépense ne doit point sans doute être pris dans un sens métaphysique et rigoureux, mais dans un sens purement mathématique, c'est-à-dire pour quantité mathématique, qui, dans plusieurs cas, est égale à un minimum. » (*Encyclopédie,* art. *Force*).

(74) *Mémoires de l'Académie des Sciences,* 1749, p. 776.

(75) *Mémoires de l'Académie de Berlin,* 1752, p. 296. Si Maupertuis ne se montra pas préoccupé d'abandonner le terrain mathématique pour répondre à l'objection portée par D'Arcy dans le point de vue métaphysique, Bertrand voulut combler cette lacune : « On trouvera aussi bien déplacée la réflexion que fait M. D'Arcy que l'accord du principe avec le choc des corps ne saurait être regardé comme une démonstration métaphysique du principe. Comme si ç'avait été l'intention de M. de Maupertuis de démontrer métaphysiquement son principe, en faisant voir son accord en résultat des faits avec la loi connue du choc des corps. On ne peut supposer ici à M. de Mauper-

tuis que le dessein de donner une preuve assez convaincante de son principe, fondée sur ce que les changements qui arrivent dans la Nature y sont pour la plupart causés par le choc, en sorte que, dès qu'une fois il a montré que l'action requise pour les changements produits par le choc est un minimum, on peut, sans balancer, étendre ce principe à tous les changements qui arrivent dans la Nature ; et M. D'Arcy ferait fort peu de cas de la vérité, s'il dédaignait un principe d'une application si universelle. » (*Examen des réflexions de M. D'Arcy sur le principe de la moindre action,* in *Mémoires de l'Académie de Berlin,* 1753, p. 316).

(76) *Mémoires de l'Académie de Berlin,* 1752, p. 297.

(77) *Mémoires de l'Académie des Sciences,* 1752, p. 774.

(78) Après avoir posé que « la quantité d'action nécessaire pour produire un changement n'est pas la différence des actions avant et après le changement », Bertrand expliquait, à propos de cette absurdité prétendue : « Il est si clair que la quantité dont M. de Maupertuis a fait un minimum est vraiment la quantité d'action ; et que la quantité que M. D'Arcy a prise pour l'action y ressemble si peu, que je crois que nous concilierons tout, en disant que tous les raisonnements de M. D'Arcy portent sur une idée fausse de l'action ; d'où il suit que plus il aura raisonné juste, en partant de cette fausse idée, plus aussi sa dernière conséquence aura dû être absurde. » (*Examen des réflexions de M. D'Arcy sur le principe de la moindre action,* in *Mémoires de l'Académie de Berlin,* 1753, p. 315).

(79) *Encyclopédie,* art. *Cosmologie.* D'ailleurs, dans l'art. *Action,* il signale que Maupertuis a su « faire dépendre d'une même loi le choc des corps élastiques et celui des corps durs, qui jusqu'ici avaient eu des lois séparées, et réduire à un même principe les lois du mouvement et celles de l'équilibre ».

(80) *Mémoires de l'Académie des Sciences,* 1749, p. 778.

(81) *Encyclopédie* art. *Cosmologie.*

(82) D'Arcy, *Mémoires de l'Académie des Sciences,* 1752, p. 777.

(83) *Encyclopédie* art. *Cosmologie.*

(84) *Mémoires de l'Académie des Sciences,* 1752, p. 775.

(85) *Encyclopédie,* art. *Cosmologie.*

(86) Sur *Gaspard de Courtivron,* voir notre étude publiée sous ce titre dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences, Arts et Belles Lettres de Dijon,* années 1927-1931. Né le 28 février 1715 au château de Courtivron, en Bourgogne, Gaspard de Courtivron, après une courte carrière militaire, fut élu à l'Académie des Sciences le 29 avril 1744 comme adjoint mécanicien en remplacement de l'abbé Nollet, puis remplaça Cassini de Thury comme associé mécanicien, le 3 septembre 1746, enfin passa pensionnaire vétéran le 10 novembre 1765. A partir de 1744, il partagea son temps entre Paris et son domaine de Courtivron, où il mourut le 4 octobre 1785.

(87) *Recherches de statique et de dynamique où l'on donne un nouveau principe général pour la considération des corps animés par des forces variables, suivant une loi quelconque* (*Mém. de l'Académie des Sciences,* 1749, p. 21 et suiv.).

(88) *Op. cit.,* p. 22. Et voici la conclusion : « Si cette loi méta-

physique, dont les mathématiques démontrent la nécessité, nous prouve une relation entre l'équilibre et le mouvement qui a quelque chose de piquant, l'emploi qu'on en pourra faire dans la solution des problèmes sera d'une commodité marquée, et je crois devoir le faire observer. La situation de l'équilibre, qui, par les méthodes connues, ne peut souvent s'obtenir qu'avec quelque circuit, se trouve d'abord avec facilité ; et dans d'autres cas où le calcul qui détermine la vitesse d'un système de corps est assez compliqué, le théorème donne un moyen très simple de vérifier l'expression de cette vitesse, en examinant si son maximum s'accorde avec la situation de l'équilibre ; dans quelques cas, il est plus aisé de trouver la vitesse, et dans d'autres, de trouver l'équilibre ; l'une ou l'autre de ces quantités trouvée sert de preuve à sa correspondante. » (*Op. cit.*, p. 40).

(89) *Op. cit.*, p. 22-23.

(90) Tetens (Johann Nicolaus), *Commentatio de principio minimi*, Bützow et Wismar, 1769.

(91) Bonfioli (Alphonsus Malvetus), *De Maupertuisiano minimæ actionis principio* (De Bononiensi scientiarum et artium Instituto atque Academia commentarii, VI, 1783).

(92) *Op. cit.*, p. 316.

(93) *Op. cit.*, p. 322.

(94) *Op. cit.*, p. 341.

(95) Il renvoie à certains passages du *Commercium philosophicum et mathematicum Got. Gul. Leibnitii et Johan. Bernoullii*, 2 vol. in-4 ; Lausanne et Genève, 1745.

(96) Voir *Systema universi. De viribus vivis deque virium mortuarum actione dialogi.*

(97) On verra plus loin pourquoi nous traduisons ainsi le terme *projecta* employé par Euler.

LE PRINCIPE DE LA MOINDRE ACTION CHEZ EULER

Nous avons déjà vu comment, dans plusieurs mémoires (98), Euler expliqua et défendit le principe de la moindre action contre diverses objections, en même temps qu'il maintint, contre Kœnig, la priorité de Maupertuis dans cette découverte. Il nous reste à envisager dans quelles circonstances, après avoir été conduit par ses propres recherches à des résultats en accord avec ce principe, il fut amené à en faire des applications remarquables, en le transformant d'ailleurs d'une façon particulièrement féconde.

Daniel Bernoulli avait, dans une lettre du 28 janvier 1741 (99), posé à Euler la question de savoir si l'on pourrait résoudre le problème des forces centrales par la méthode des isopérimètres. Il revint sur la question dans une lettre du 12 décembre 1742 ; et, en mars 1743, Euler trouva la solution, comme en témoigne une nouvelle lettre de Daniel Bernoulli le félicitant, le 23 avril, de sa belle découverte. Aussi, dès 1744, Euler expliquait-il, dans un appendice (*De motu projectorum*) à son grand ouvrage (100) : « Puisque tous les effets de la nature suivent quelque loi de *maximum* ou *minimum,* il n'est pas douteux que, dans les courbes que décrivent les corps lancés (101) sollicités par des forces quelconques, se trouve quelque propriété de *maximum* ou de *minimum.* Cependant il paraît moins facile de définir *a priori,* en partant de principes métaphysiques (102), quelle est cette propriété ; mais, puisqu'il est possible de déterminer ces courbes à l'aide de la méthode directe, on pourra, en y apportant l'attention voulue, en conclure cela même qui, dans les courbes ainsi considérées, est *maximum* ou *minimum.* Mais on doit surtout envisager l'effet qui doit provenir des forces sollicitantes ; et comme celui-ci consiste dans le mouvement

engendré dans ce corps, il paraît conforme à la vérité que ce mouvement même, ou plutôt l'ensemble de tous les mouvements qui résident dans le corps lancé doive être un *minimum*. Quoique cette conclusion ne paraisse pas suffisamment confirmée, cependant, si je montre qu'elle s'accorde avec la vérité déjà connue *a priori*, il s'ensuivra [pour elle] un si grand poids que tous les doutes qui pourraient naître à son sujet s'évanouiront complètement. Bien plus, lorsque sa vérité aura été démontrée, il sera plus facile de pousser les recherches dans les lois profondes de la nature et les causes finales, et de corroborer cette assertion par des raisons très solides.

« Soit *M* la masse du corps lancé, et, pendant qu'il parcourt l'élément d'espace *ds*, soit $\sqrt{v}$ sa vitesse due à la hauteur (102 *bis*). La quantité de mouvement du corps en cet endroit sera M $\sqrt{v}$ qui multipliée par *ds* donnera $Mds\sqrt{v}$, mouvement d'ensemble (*collectivum*) du corps sur le parcours de l'élément d'espace *ds*. Je dis alors que la ligne décrite par le corps sera d'une forme telle que, parmi toutes les lignes ayant mêmes extrémités, l'expression $\int Mds\sqrt{v}$ ou, puisque *M* est constant, l'expression $\int ds\sqrt{v}$ soit un *minimum*. Que si d'autre part on considère la courbe cherchée comme donnée, la vitesse $\sqrt{v}$ provenant des forces sollicitantes peut être définie par des quantités se rapportant à la courbe, et par conséquent la courbe elle-même peut être déterminée par la méthode des *maxima* et *minima*. D'ailleurs l'expression ci-dessus, cherchée en partant de la quantité de mouvement, pourra aussi être traduite par rapport aux forces vives : soit en effet *dt* le temps de parcours de l'élément *ds* ; comme $ds = dt\sqrt{v}$, on aura $\int ds\sqrt{v} = \int v dt$; de telle sorte que, dans une courbe décrite par un corps lancé, la somme de toutes les forces vives qui, à chaque instant, résident dans le corps est *minima*. Aussi ni ceux qui décident qu'il faut estimer les forces par les vitesses elles-mêmes, ni ceux qui [décident qu'il faut] les estimer par les carrés des vitesses ne trouveront ici quoi que ce soit qui heurte leurs idées (103) ».

Après avoir appliqué avec succès son principe à quelques cas (mouvement parabolique des corps pesants, mouvements

produits par une force centrale, etc.), Euler continue : « De ces cas donc se dégage en pleine lumière le parfait accord du principe ici établi avec la vérité. Quant à savoir si cet accord aura encore lieu dans des cas plus compliqués, il peut rester [sur ce point] un doute. Aussi faudra-t-il chercher à déterminer avec beaucoup de soin jusqu'où s'étend ce principe, afin de ne pas lui attribuer plus que ne le permet sa nature. Pour expliquer cela, tout mouvement de corps lancés doit être réparti en deux groupes. Dans l'un d'eux, la vitesse du corps, en quelque lieu qu'il l'ait, dépend uniquement de sa situation, de sorte que, si le corps revient au même point, il reprendra aussi la même vitesse ; ce qui arrive si le corps est tiré vers un ou plusieurs centres fixes par des forces qui soient comme des fonctions quelconques des distances à ces centres. Au second groupe je rapporte ces mouvements de corps lancés dans lesquels la vitesse du corps n'est pas déterminée par le lieu seul où il se trouve ; ce qui se rencontre couramment si ces centres vers lesquels le corps est sollicité sont mobiles, ou si le mouvement a lieu dans un milieu résistant. Cette distinction étant faite, il faut noter que, toutes les fois que le mouvement du corps se rattache au premier groupe, c'est-à-dire si le corps est sollicité par des forces quelconques non seulement vers un, mais vers un nombre quelconque de centres fixes, dans ce mouvement la somme de tous les mouvements élémentaires sera minima (104).

Et c'est cela même que postule la nature de la proposition [considérée]. En effet, quand on cherche, entre des extrémités données, la courbe dans laquelle $\int ds \sqrt{v}$ est minimum, on suppose par là même que la vitesse du corps est la même aux deux extrémités, quelle que soit la courbe décrite par le corps. Quel que soit d'ailleurs le nombre des centres fixes de forces, la vitesse du corps en un lieu quelconque M s'exprime par une fonction déterminée des deux variables CP $= x$ et PM $= y$. Soit donc v une fonction quelconque de x et de y de telle sorte que $dv = \mathrm{T}dx + \mathrm{V}dy$; et voyons si notre principe nous donnera la véritable trajectoire (*projectoriam*) du corps. Puisque $dv = \mathrm{T}dx + \mathrm{V}dy$, le corps se mouvra comme s'il était sollicité en M par deux forces, l'une T dans la direction parallèle aux abscisses,

l'autre V dans la direction parallèle aux ordonnées ; ce qui donne la force tangentielle $= \frac{Tdx + Vdy}{ds}$ et la force normale $= \frac{-Vdx + Tdy}{ds}$. Par suite de la nature du mouvement libre, on doit avoir

$$\frac{2v}{r} = \frac{-Vdx + Tdy}{ds} = \frac{-V + Tp}{\sqrt{(1+pp)}}$$

Si la méthode des *maxima* et *minima* nous conduit à cette équation, notre principe sera tout à fait conforme à la vérité. »

Or précisément, en posant, conformément à ce principe, $\int dx \sqrt{v(1 + pp)}$ minimum, Euler retrouve effectivement, par application des procédés de calcul utilisés par lui dans les problèmes d'isopérimètres, le résultat $\frac{2v}{r} = \frac{Tp - V}{\sqrt{(1+pp)}}$ fourni par la méthode directe.

« Ce principe, conclut-il, s'étend donc si loin que seul le mouvement troublé par une résistance du milieu paraît devoir lui échapper. Et certes la raison de cette exception est facile à comprendre, parce que dans ce cas le corps parvenant au même lieu par des chemins différents n'acquiert pas la même vitesse. C'est pourquoi, une fois toute résistance supprimée dans le mouvement des corps lancés, toujours cette propriété constante aura lieu, à savoir que la somme de tous les mouvements élémentaires est minima. Et d'ailleurs cette propriété n'est pas susceptible d'apparaître seulement dans le mouvement d'un corps unique, mais encore dans le mouvement de plusieurs corps pris ensemble ; de quelque manière que ceux-ci agissent les uns sur les autres, la somme de tous les mouvements n'en est pas moins toujours minima. Et cela, étant donné que des mouvements de cette sorte se plient difficilement au calcul, est compris plus facilement en partant des premiers principes qu'en suite de l'accord des calculs faits suivant les deux méthodes. En effet, puisque les corps, en vertu de l'inertie, résistent à tout changement d'état, ils obéiront le moins possible aux forces sollicitantes, si toutefois ils sont libres ; d'où il résulte que, dans le mouvement engendré, l'effet provenant des forces doit être moin-

dre que si le corps ou les corps étaient mus de quelque autre manière. Même si la force de ce raisonnement n'apparaît pas encore assez clairement, toutefois, comme il s'accorde avec la vérité, je ne doute pas que, grâce aux principes d'une métaphysique plus saine, il ne puisse être mis en plus grande évidence ; et je laisse cette tâche à d'autres, qui font profession de métaphysique. »

Reprenant, quelques années plus tard, l'examen de cette question, qui avait d'autant moins cessé de le préoccuper que le mémoire de Maupertuis avait plus retenu son attention (même avant qu'éclatât la querelle dans laquelle il devait prendre parti, comme nous l'avons vu), Euler commençait, pour dresser le bilan des applications du principe de la moindre action, par rappeler, en se référant à son *De motu projectorum* : « J'ai découvert une semblable loi dans le mouvement des corps qui sont attirés, vers un ou plusieurs centres de forces, par des forces quelconques ; ayant remarqué que le mouvement du corps, et la courbe qu'il décrit, renferme toujours cette propriété que, nommant v sa vitesse dans un endroit quelconque, et ds l'élément de l'espace, cette formule $\int v\,ds$ sera toujours un minimum. Ce sera donc dans ce cas cette formule $\int v\,ds$ qui exprime ce que M. de Maupertuis nomme la quantité d'action. » Considérant d'autre part l'application du principe faite par Maupertuis lui-même au choc des corps, élastiques ou non, il poursuivait : « Ces deux cas du mouvement, dans lesquels nous voyons que ce principe a lieu, sont d'une si grande étendue, qu'on y peut presque réduire tous les mouvements qui arrivent au monde ; et partant on n'aura plus la moindre raison de douter que, dans tous les mouvements, par quelques forces qu'ils soient produits, il n'y ait toujours une certaine formule dont la valeur soit la plus petite, et par laquelle sera représentée la quantité d'action. » (105).

En tenant compte enfin non seulement de ce qu'avait établi Maupertuis pour l'équilibre, mais aussi de la fécondité du principe de la moindre action en divers autres problèmes, Euler s'estimait en droit d'affirmer : « C'est donc ce principe de la moindre quantité d'action, auquel M. de Maupertuis réduit tous les *maxima* ou *minima*, que la Nature observe

dans toutes ses productions ; et la quantité d'action pourra toujours être représentée par une certaine formule algébrique, qui, étant appliquée à l'effet produit réellement par la Nature, y obtient une valeur plus petite qu'elle obtiendrait s'il était arrivé tout autre effet. »

Quant aux problèmes auxquels, dans ce nouveau travail, Euler appliquait le principe de la moindre action, il vaut la peine de les considérer avec quelque attention. Tous ont été rendus classiques par les travaux de Jean Bernoulli (106). Le premier est celui de la chaînette. « Il a été aisé de prévoir qu'une chaîne suspendue de ses deux bouts devait prendre une telle figure, afin que son centre de gravité soit le plus bas ; ou que la distance de ce centre au centre de la terre, ou bien à un plan horizontal, soit un minimum. Si l'on nomme un élément quelconque de la chaîne $= ds$, et sa distance à un plan horizontal fixe pris à volonté $= x$, ce sera la valeur de cette formule $\int x\, ds$ qui sera un minimum pour la courbe de la chaîne; et partant ce sera la même formule $\int x\, ds$ qui représente la quantité d'action qui doit être la plus petite. » (107). Pour le second problème, Euler se contentait d'indiquer : « De même un linge rempli d'un fluide prendra la figure dont la capacité est la plus grande, afin que le fluide puisse descendre le plus bas qu'il est possible. »

En ce qui concerne les courbes élastiques, « M. Daniel Bernoulli a aussi remarqué que la courbe d'une lame élastique renferme un tel minimum ; car nommant un élément quelconque de cette courbe $= ds$, et le rayon de sa développée dans cet endroit $= r$, il a observé que la valeur de cette formule $\int \frac{ds}{rr}$ devient un minimum dans la courbe élastique ; et c'est de ce principe que j'ai déterminé la nature de cette courbe, dans mon traité sur la méthode *de maximis et minimis*, pour faire voir que ce principe fournit la même courbe qu'on a trouvée par la méthode directe, dont on se sert ordinairement ».

Sur ce résultat Euler basait des considérations capitales pour la question que nous envisageons ici. « Par là on voit, insistait-il, qu'il doit y avoir une double méthode de résoudre les problèmes de mécanique ; l'une est la méthode directe

qui est fondée sur les lois de l'équilibre, ou du mouvement ; mais l'autre est celle dont je viens de parler, où sachant la formule qui doit être un maximum ou un minimum, la solution se fait par le moyen de la méthode *de maximis et minimis*. La première fournit la solution en déterminant l'effet par les causes efficientes ; or, l'autre a en vue les causes finales, et en déduit l'effet : l'une et l'autre doit conduire à la même solution, et c'est cette harmonie qui nous convainc de la vérité de la solution, quoique chaque méthode doive être fondée sur des principes indubitables. Mais il est souvent très difficile de découvrir la formule qui doit être un maximum ou un minimum, et par laquelle la quantité d'action est représentée. C'est une recherche qui n'appartient pas tant à la mathématique qu'à la métaphysique, puisqu'il s'agit de connaître le but que la nature se propose dans ses opérations ; et ce serait porter cette science à son plus haut degré de perfection, si l'on était en état d'assigner, pour chaque effet que la nature produit, cette quantité d'action qui est la plus petite, et qu'on pût la déduire des premiers principes de notre connaissance. Mais je crois que nous sommes encore bien éloignés de ce degré de perfection, et qu'il sera presque impossible d'y arriver, à moins que nous ne découvrions, pour un grand nombre de cas différents, les formules qui y deviennent des maxima ou minima. Or, sachant les solutions que la méthode directe nous fournit, il ne sera pas difficile de deviner des formules qui, étant supposées des maxima ou minima, conduisent aux mêmes solutions. Par ce moyen, nous connaîtrons *a posteriori* ces formules qui expriment la quantité d'action, et alors il ne sera plus si difficile d'en démontrer la vérité par les principes connus de la métaphysique. » (108). Ce texte pourrait fournir matière à bien des réflexions ; en en réservant quelques-unes, nous nous contenterons de faire remarquer ici combien, en rattachant lui-même l'une de ces deux méthodes à la métaphysique et à la recherche des causes finales, Euler se rapproche de la position téléologique de Leibniz, au moins autant et même plus que de celle de Maupertuis. En effet le finalisme retrouve là, en quelque sorte, une souplesse leibnizienne, et sans se laisser enfermer dans le principe strict d'épargne, il rejoint de nou-

veau de manière plus adéquate, pour ainsi dire, la méthode de calcul des maxima et minima. Mais du même coup le principe de la moindre action est sinon transformé, au moins envisagé sous un aspect différent, où la notion de minimum perd sa valeur essentielle. Le caractère mathématique l'emporte plus décidément que chez Maupertuis. Par là déjà se vérifie la très juste remarque de L. G. Du Pasquier : « Euler a sorti le principe de la moindre action de son enveloppe métaphysique et lui a donné une formulation mathématique précise, sur laquelle les successeurs ont pu bâtir de fort belles théories. » (109).

C'est dans l'état d'esprit exprimé par le texte cité plus haut de lui qu'Euler entreprit d'apporter des développements au problème de la chaînette, en étudiant la courbe formée par un fil flexible, non plus seulement soumis à la pesanteur, mais sollicité par des forces quelconques. Voici d'ailleurs comment Euler précise son but et ses intentions : « Je chercherai premièrement la solution de ces problèmes par la méthode directe, c'est-à-dire par les lois connues de l'équilibre ; ensuite je tâcherai de découvrir les formules qui, dans ces courbes trouvées, obtiennent ou la plus grande ou la plus petite valeur, et lesquelles par conséquent pourront être regardées comme les expressions de la quantité d'action, dont la valeur sera plus petite pour la courbe qu'on aura trouvée par l'autre méthode, qu'elle serait, si le fil avait pris toute autre courbure. J'ai choisi cette espèce de problèmes, puisqu'on sait déjà que, dans le cas où le fil n'est sollicité que par la gravité, c'est la distance du centre de gravité du fil au centre de la terre qui est un minimum. Or je rendrai ce problème plus général, en supposant que toutes les particules du fil soient sollicitées par des forces quelconques, qui soient dirigées ou vers un point fixe ou vers plusieurs, étant proportionnelles à des fonctions quelconques de ces distances : de plus, on pourra supposer que, tant la direction que la quantité de ces forces, dépende de la courbure même, comme cela arrive dans la courbe des voiles, et d'autres semblables, où la direction des forces est toujours perpendiculaire à la courbe même, et dans ces cas, j'ai remarqué qu'il est beaucoup plus difficile de deviner la formule qui y est un maximum ou

minimum ; et partant cette considération contribuera d'autant plus à la connaissance des choses que la nature, dans ses opérations, tâche de ménager le plus qu'il est possible. » (110). Sans suivre ici Euler dans les calculs par lesquels il réalisa cette autre application du principe de la moindre action, application qui apportait en même temps une nouvelle vérification de la très grande généralité de ce principe, notons seulement quelle hésitation à abandonner la règle d'épargne marque la dernière phrase de l'énoncé.

La persistance de l'influence de Maupertuis est au moins aussi manifeste dans le début d'un autre mémoire, présenté également en 1748 à l'Académie de Berlin (111). Après avoir rappelé les solutions obtenues dans les problèmes concernant des fils sollicités par des forces quelconques, Euler écrivait : « Mais puisque j'ai été conduit à la connaissance de ce minimum *a posteriori,* il s'agit maintenant de découvrir les raisonnements qui nous puissent conduire *a priori* à la même connaissance ; ou bien il faut rechercher les principes desquels on pourrait conclure ce minimum, quand même on ne connaîtrait pas encore la courbe que le fil prend actuellement. Ces principes une fois découverts ne manqueront pas de répandre beaucoup de lumière sur les lois que la nature observe dans un nombre infini de ses autres productions, pour la détermination desquelles la mécanique même n'est pas encore portée à un degré suffisant de perfection ; et il n'y a aucun doute que la métaphysique ne puisse tirer de cette découverte quantité d'éclaircissements sur la manière d'agir des forces en général ».

Et la suite est encore plus explicite : « Pour mieux réussir dans cette recherche, il faut commencer par la même considération dont M. de Maupertuis s'est servi pour établir sa loi générale du repos ; car cette considération nous conduira à une idée plus précise et plus féconde de ce qu'on doit entendre par la quantité d'action des forces. Nous verrons que la chose nommée par ce terme est de la dernière importance dans toutes les actions des forces, soit que les corps qui en sont sollicités demeurent en équilibre, ou qu'ils soient mis en mouvement, ce que je ferai voir par plusieurs preuves très convaincantes. Après cela on conviendra aisément que

cette quantité d'action des forces doit entrer dans toutes les formules dont la valeur est la plus petite dans les effets qui sont produits par ces forces. C'est une règle assez généralement reçue que la nature, dans toutes ses productions, n'emploie que la plus petite quantité d'action qu'il soit possible ; mais, dans la plupart des cas, il a été jusqu'ici extrêmement difficile de bien déterminer cette quantité d'action, pour l'épargne de laquelle la nature est si soigneuse. Mais dès que nous nous serons formé une idée assez distincte de la quantité d'action des forces, que M. de Maupertuis a découverte si heureusement dans le cas d'équilibre, qu'il a traité, la plupart des autres difficultés, que la diversité des cas semble renfermer, disparaîtront bientôt, et on sera obligé de reconnaître que cette idée est d'un usage universel, tant dans la mécanique, que dans toute la physique. Quand même on ne goûterait pas les raisonnements par lesquels je ferai l'application de cette idée à quantité d'effets produits par des forces quelconques, on sera obligé d'en reconnaître la solidité par un grand nombre de cas, qu'on est en état de vérifier par les principes ordinaires de la mécanique ». (112).

Les problèmes envisagés par Euler dans ce mémoire concernent une masse fluide dont toutes les particules sont attirées, vers autant de centres fixes qu'on voudra, par des forces qui sont proportionnelles à des fonctions quelconques des distances à ces centres. Ils font apparaître l'accord entre la solution tirée des principes ordinaires de la mécanique et celle obtenue par déduction en partant de la règle posée par Maupertuis. Puis « ayant établi ce principe général que, dans tout état d'équilibre, la somme de toutes les actions des forces sur toutes les particules du corps qui est en équilibre est un minimum, je remarque de plus, poursuivait Euler (113), que ce même principe a lieu dans tous les mouvements libres des corps, de quelques forces qu'ils soient sollicités ».

Tous ces textes, qui, d'une façon générale, n'ont pas été assez remarqués (et qui sont d'autant plus intéressants qu'ils ont été écrits indépendamment de toute préoccupation étrangère à leur objet, parce qu'antérieurement à toute polémique sur la moindre action), montrent bien que, si Euler

ne s'est pas soustrait à l'influence de Maupertuis, il a cependant étendu et mathématisé le principe de la moindre action. Dans le même cadre et derrière les mêmes mots, s'introduisaient avec Euler des idées qui dépassaient en précision (sinon apparente, au moins profonde), en signification et en fécondité mathématique la formule étroite de Maupertuis, trop engagée dans une téléologie rigide. S'il reste bien à celui-ci d'avoir créé le courant, ouvert la voie, révélé des horizons nouveaux, c'est à Euler que revient le mérite d'avoir mis au point et organisé en une méthode ce qui risquait fort de rester, aux yeux des générations futures, une intuition plus brillante que profonde. De ce point de vue, on peut reconnaître, avec Otto Spiess, que c'est Euler qui a véritablement fondé le principe de la moindre action (114).

Que logiquement ces calculs de *maxima et* de *minima* puissent présenter des analogies avec des textes leibniziens actuellement connus, et qu'à ce point de vue Euler puisse prendre place, *pour nous*, entre Leibniz et Lagrange, au moins autant sinon plus qu'à la suite ou à côté de Maupertuis, ce n'est guère contestable ; et nous l'avons déjà accessoirement reconnu plus haut, en étudiant les rapprochements possibles entre Leibniz et Maupertuis. Mais, tout en se rattachant encore ainsi, dans notre perspective, à Leibniz, sans en recevoir quelque influence directe sur le plan des mathématiques (nous avons aussi réservé plus haut une influence indirecte possible, qui se serait exercée par l'intermédiaire de Jean Bernoulli), Euler, dans le développement historique du principe de la moindre action, est, malgré ses progrès par rapport à Maupertuis, très imprégné de la pensée de celui-ci. Nous n'en avons pas seulement pour preuve les fréquents retours à la notion d'épargne, étrangère pourtant à sa propre téléologie (plus nettement inspirée de Leibniz, comme nous l'avons dit) et peu en accord d'autre part avec les notions mathématiques impliquées dans sa méthode des *maxima* et *minima* (où le concept de minimum n'est pas essentiel) ; ce qui établit encore la chose, c'est la tendance à reprendre, après la démonstration *a posteriori*, qui retrouve seulement les résultats déjà obtenus par la méthode ordinaire de la mécanique, le raisonnement *a priori* à partir du principe de

la moindre action. On ne peut s'étonner dès lors qu'Euler se soit attaché à cette expression même, au point de la transmettre, pour ainsi dire, et presque de l'imposer, malgré son impropriété, à Lagrange et à ses successeurs. Ainsi, même après Euler, ce n'était pas seulement par sa dénomination, mais aussi par son acception, que le principe de la moindre action restait engagé dans une ambiance scientifique développée autour de Maupertuis. Il faudra attendre Lagrange pour que la libération complète vis-à-vis de la métaphysique soit accomplie, et pour qu'apparaisse dans toute sa précision mathématique le principe auquel Euler a surtout donné sa forme et sa valeur.

EXTRAITS DE LETTRES INÉDITES (114 *bis*) D'EULER A MAUPERTUIS

(10 *décembre* 1745.)

...Je trouve ce problème beaucoup plus difficile que je me l'étais imaginé, et j'y rencontrai presque partout des obstacles insurmontables. Cependant j'ai ramassé les articles ci-joints, dont quelques-uns peut-être pourront servir à déterminer mieux l'état de la question, dont la solution vous est réservée. J'ai lu aussi, Monsieur, votre excellente pièce sur le grand principe de repos, et, sans vous flatter, j'ai l'honneur de vous assurer que j'estime le développement de cette matière infiniment plus que les solutions les plus recherchées des problèmes particuliers. En effet, je suis convaincu que partout la nature agit selon quelque principe d'un *maximum* ou *minimum ;* or de déterrer en chaque cas ce *maximum* ou *minimum*, c'est, à mon avis, non seulement une recherche très sublime, mais aussi très utile pour éclairer notre connaissance; il me semble aussi que c'est ici qu'il faudrait chercher les véritables principes de la métaphysique. Je crois aussi votre principe plus général que vous ne le proposez; et je suis persuadé que, dans un système de corps quelconque qui se trouve en repos, où chaque particule est poussée selon une certaine direction par une force motrice P : prenant dans la même direction un élément d'espace $= dz$, par lequel ladite particule serait poussée dans un temps infiniment petit dt, si elle était dégagée du système : je dis que $\int Pdz$ sera un *maximum* ou *minimum ;* mais dans ce cas j'avoue qu'on ne saurait plus démontrer ce principe si géométriquement que vous l'avez fait. Sur la fin de mon traité des isopérimètres, j'ai déduit les courbes élastiques d'un tel principe de *maximum* ou *minimum*, que M. Bernoulli m'avait fourni, et que je vois maintenant qu'il coule fort naturellement de votre principe. Au même endroit je fis aussi voir que, dans les mouvements, la nature observe constamment un certain *maximum* ou *minimum* et j'ai déterminé par un tel principe toutes les courbes trajectoires que les corps qui sont attirés vers un centre fixe ou qui

s'attirent réciproquement doivent décrire. Que la masse d'un tel corps soit = M, sa vitesse dans un point quelconque de son orbite = *u*, et l'élément du chemin qu'il parcourt = *ds*, je dis que $\int Muds$ sera toujours un *maximum ;* et s'il y a plusieurs corps M, M', M'', etc. qui s'attirent mutuellement selon une loi quelconque, dont les vitesses à un temps donné soient *u*, *u'*, *u''*, etc., et les espaces parcourus en même temps = *ds*, *ds'*, *ds''*, etc., le mouvement de tous ces corps ensemble sera tel que $\int Muds + \int M'u'ds' + \int M''u''ds''$ etc. sera un *maximum*. Il est vrai que je ne saurais démontrer ce principe à la rigueur, mais comme il me fournit toujours la même solution que les principes ordinaires de la mécanique, je suis tout à fait persuadé de sa vérité. En voilà donc une grande science, qui nous manque encore, et qui roule sur les principes généraux qui s'observent dans la nature : et il me semble que c'est là où réside la véritable métaphysique, en tant qu'elle renferme les premiers principes de la physique et de la mathématique ; de laquelle la métaphysique de Leibniz et de Wolff est encore bien éloignée.

. . . .

(24 *mai* 1746.)

MONSIEUR,

Il faut que j'avoue que je ne vois pas encore assez clairement comment la considération de l'espace parcouru dans un temps donné doit entrer dans la détermination de la quantité d'action; je voudrais savoir s'il y a des cas où cet espace n'est pas proportionnel à la vitesse, ou non ? Dans les exemples auxquels vous appliquez cette règle, je vois que cet espace est toujours exprimé par la vitesse même, de sorte que la quantité d'action devient égale au produit de la masse par le carré de la vitesse, dont le mouvement est changé; si donc cela arrivait constamment, il me semble que la chose deviendrait plus intelligible, si l'on ajoutait qu'au lieu de cet espace on pourrait toujours prendre la vitesse même. Or, s'il y avait des cas où cela n'est pas permis (comme si le changement ne se faisait pas d'un mouvement uniforme ou l'espace parcouru dans un certain temps pourrait être non-proportionnel à la vitesse) ne serait-il pas à propos de faire mention de ces cas ? Ou, en tout cas, ne serait-ce pas la même chose de dire qu'il faut prendre l'espace divisé par le temps; ce qui me paraît plus précisément parlé, parce que le seul mot de temps, sans en déterminer la quantité, pourrait quelquefois laisser quelque incertitude dans l'application.

Après avoir lu de nouveau les articles 20 et 21, il me semble que

la vitesse qu'il faut concevoir imprimée aux plans immatériels étant toujours égale à (la) différence ou au changement de la vitesse de chaque corps, cela seul pourrait suffire pour l'application de la règle, vu que cette idée ne sert qu'à représenter plus distinctement le changement même arrivé dans chaque corps : or, pour la force qu'il faudrait employer pour produire ces mouvements, je ne vois pas qu'elle soit nécessaire dans l'application de la règle, parce que la détermination de la quantité d'action n'a égard à aucune force, et il me semble qu'on se pourrait dispenser de la discussion de cette question : combien de force il faut pour imprimer à un corps donné un certain degré de vitesse ? Cette question n'étant pas même déterminée, si l'on n'y ajoute pas le temps dans lequel le changement doit être produit : car la plus petite force est capable de produire le plus grand degré de vitesse, pourvu que le temps suffise. C'est pour cette raison qu'il me semble qu'on se pourrait tout à fait passer de la considération de la force dont il est parlé dans l'article 21. Car ayant déjà établi, dans l'article 20, que le changement du corps A consiste dans la vitesse $a - x$ et dans l'espace $a - x$; et celui du corps B, dans la vitesse $x - b$, et l'espace $x - b$, tous les points sont déjà déterminés, dont on a besoin pour l'application de la règle; et l'on en peut déjà former la conclusion, que la quantité d'action sera $A (a - x)^2 + B (x - b)^2$, sans avoir égard à aucune considération nouvelle, comme serait celle de quelque force. Pourtant je n'oserais pas ajouter à la marge ces réflexions, à cause du doute que j'ai encore sur la quantité d'action par rapport à l'espace, comme j'ai marqué au commencement.

. . . .

[Pour l'intelligence de ce texte et du suivant, nous croyons utile d'insérer ici le passage du mémoire (présenté par Maupertuis, en 1746, à l'Académie de Berlin) désigné par Euler comme constituant l'article 20. Ce qui est dit de l'article 21 se réfère à la détermination des lois du mouvement dans le choc des corps élastiques. Notons d'ailleurs que la division en articles a disparu dans la rédaction définitive et par conséquent dans le texte imprimé].

« Soient deux corps durs, dont les masses sont A et B, qui se meuvent vers le même côté, avec les vitesses a et b ; mais A plus vite que B, en sorte qu'il l'atteigne et le choque. Soit la vitesse commune de ces deux corps après le choc $= x < a$ et $> b$. Le changement arrivé dans l'univers consiste en ce que le corps A, qui se mouvait avec la vitesse a, et qui dans un certain temps parcourait un espace $= a$, ne se meut plus qu'avec la vitesse x, et ne parcourt qu'un espace $= x$; le corps B, qui ne se mouvait qu'avec la vitesse b, et ne parcourait

qu'un espace $= b$, se meut avec la vitesse x, et parcourt un espace $= x$.

« Ce changement est donc le même qui serait arrivé, si, pendant que le corps A se mouvait avec la vitesse a et parcourait l'espace $= a$, il eût été emporté en arrière sur un plan immatériel, qui se fût mû avec une vitesse $a - x$, par un espace $= a - x$; et que, pendant que le corps B se mouvait avec la vitesse b, et parcourait l'espace $= b$, il eût été emporté en avant sur un plan immatériel, qui se fût mû avec une vitesse $x - b$, par un espace $= x - b$.

« Or, que les corps A et B se meuvent avec des vitesses propres sur les plans mobiles, ou qu'ils y soient en repos, le mouvement de ces plans chargés de corps étant le même, les quantités d'action produites dans la nature seront $A(a-x)^2$ et $B(x-b)^2$; dont la somme doit être la plus petite qu'il soit possible. On a donc... etc. »

(*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1746, p. 290-291.)

(28 *décembre* 1746.)

Monsieur,

Je suis persuadé que l'idée d'un plan immatériel, que vous imaginez pour représenter la différence entre les états où les corps se trouvent avant et après le choc, est fort juste et qu'on s'en peut toujours servir sans rien risquer; mais je doute fort si l'on peut réaliser la même idée, en proposant, par exemple, cette question. Soit un plan ABCD en repos, sur lequel le corps M se meuve avec une vitesse donnée m dans la direction MN; on demande ce qui arrivera, quand ce plan sera poussé par une force donnée PQ.

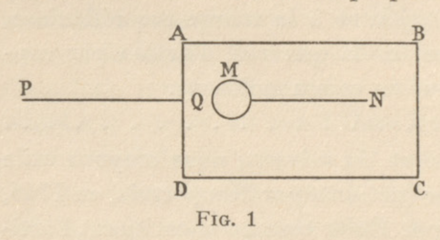


Fig. 1

Dans ce cas, je dis que, supposant le plan parfaitement poli, le mouvement du corps M ne sera point du tout dérangé par l'action de la force PQ, et que le plan ABCD glissera sous le corps M sans en altérer le mouvement. Donc, pour que le corps M participe au mouvement qu'on imprime au plan, il faut qu'on applique une force accélératrice égale.

Mais j'observe que cette circonstance ne touche rien au but que vous avez en vue; et il me semble qu'on puisse exprimer votre idée de cette manière, qui ne sera pas assujettie à ce doute : il est certain que le changement du mouvement d'un corps est le même, soit qu'on rapporte le mouvement à l'espace absolu et en repos, ou à un espace qui a un mouvement uniforme en ligne droite. Ainsi le corps M étant

rapporté à l'espace absolu, s'il a une vitesse m suivant la direction MN, et que ce corps change subitement de vitesse (par quelque choc), de sorte qu'il se meuve avec la vitesse $m + \mu$ dans la même direction MN, le changement de la vitesse sera μ. Rapportons maintenant le même corps M avec le changement qui lui arrive à l'espace ABCD, qui se meut avec une vitesse p dans la direction QP, et par rapport à ce plan mu, la vitesse du corps avant le choc sera $= m - p$, et après le choc $= m + \mu - p$; et le changement de vitesse sera le même que dans le cas précédent.

Cela posé dans le cas que vous considérez, où les corps A et B étant rapportés à l'espace absolu se meuvent avec des vitesses a et b avant le choc, et qu'après le choc leur vitesse commune soit $= x$, on pourra dire que le changement qui arrive au corps A sera le même que s'il eût été rapporté à un plan mobile quelconque. Le rapportons donc à un plan qui se meut d'une vitesse $= a$, dans la même direction AC et il est clair que le corps A, par rapport à ce plan, aura avant le choc une vitesse $= 0$, et après le choc, une vitesse $= x - a$ ou $a - x$ dans le sens contraire; ce changement donc étant le même que dans le cas de l'espace infini, on voit d'abord que le changement qui arrive au corps A est le même que si, après avoir été en repos, on lui eût imprimé une vitesse $= a - x$. Par la même manière rapportant le corps B à un plan qui se meut d'une vitesse b dans la direction CA, on aura sa vitesse avant le choc $= 0$ et après le choc $= x - b$, donc le changement du corps B causé par le choc sera le même que si on lui (ayant été en repos) avait imprimé une vitesse $= x - b$. Or, suivant votre principe, Monsieur, l'action requise pour produire ces changements sera $A(a - x)^2$ pour le corps A, et $B(x - b)^2$ pour le corps B, tout comme vous l'aviez trouvé.

. . . .

(26 *juillet* 1747.)

. . . .

J'ai l'honneur de vous écrire en détail mon examen s'il est possible de prouver la vérité des principes de mécanique par celle des lois de collision en les supposant constatées par l'expérience.

Soient deux corps A et B qui se choquent actuellement; et, au lieu de la force dont l'un agit sur l'autre, je conçois, entre eux un ressort xy ou ab qui

Fig. 2

se bande à mesure que le choc se fait : soient A et B les masses des corps et a et b leurs vitesses avant le choc, l'une et l'autre étant dirigées de O vers Z; dans un instant quelconque que dure le choc, soit d'un point fixe O :

la distance $Oa = x$.
la distance $Ob = y$.
la vitesse de $A = v$.
la vitesse de $B = u$.
l'élément du temps $= dt$.

Et on aura :

$$dt = \frac{dx}{v} = \frac{dy}{u}$$

la longueur du ressort $ab = y - x = z$; plus courte que la naturelle, qui soit $= c$; et qui a lieu au commencement du choc : de sorte que le raccourcissement du ressort soit $= c - z$; et partant la force du ressort sera comme une certaine fonction de $c - z$, qui soit $= p$: dont le corps A est poussé en arrière et B en avant; et suivant les règles reçues on aurait :

$$pdt = - Adv = Bdu.$$

Mais, comme je dois douter encore de la vérité de ces règles, je choisirai des expressions encore plus générales. Pour cet effet, soient V et U des fonctions quelconques semblables des vitesses v et u; et P une fonction quelconque de p; qui sera, par conséquent, une fonction de $c - z$; et, au lieu des formules reçues, je considérerai celles-ci :

$$Pdt = - AdV \quad \text{et} \quad Pdt = + BdU$$

qui, étant plus générales, renfermeront les véritables [supposé ?] que les ordinaires ne le soient pas. Ces deux formules fournissent d'abord :

I. $AdV + BdU = o$ et à cause de $dt = \frac{dx}{v} = \frac{dy}{u}$

II. $Pdx = - AvdV$ et $Pdy = + BudU$ dont ôtant l'une de l'autre

III. $AvdV + BudU = P(dy - dx) = Pdz$. Mais P étant une fonction de $c - z$ ou de z, $\int Pdz$ sera une fonction de $c - z$, qui soit $= f : (c - z)$ et cette troisième équation donne :

IV. $A\int vdV + B\int udU = f : (c - z)$.

Maintenant, sachant par l'expérience que, durant tout choc, le commun centre de gravité des deux corps continue à se mouvoir uniformément, il s'ensuit que $Av + Bu$ est une quantité constante, et partant $Adv + Bdu = o$. Or, l'équation I donne $AdV + BdU = o$, ce qui fournit $\frac{dV}{dv} = \frac{dU}{du}$, donc puisque V et U sont des fonc-

tions semblables de v et de u afin que $\frac{dV}{dv} = \frac{dU}{du}$, quelque inégales que soient v et u, il faut de nécessité que V et U soient proportionnelles aux vitesses v et u mêmes, et puisqu'il s'agit ici seulement des proportionnalités, soit $V = v$ et $U = u$ et le mouvement uniforme du centre de gravité nous fournit déjà les formules moins générales $Pdt = -Adv$ et $Pdt = Bdu$; qui ne diffèrent des ordinaires qu'en ce que P marque ici encore une fonction quelconque de la force sollicitante p, et il n'en paraît pas encore que P doit être égale à p même.

Or, n'ayant considéré jusqu'ici qu'une seule condition connue du choc, qui est commune aux corps élastiques et non élastiques, je vais considérer les autres conditions de l'une et de l'autre espèce. Pour les corps non élastiques, on sait que le choc cesse dès que les enfoncements ou l'intervalle $c - z$ est devenu le plus grand, c'est-à-dire quand $dz = o = dy - dx$. Dans ce cas l'équation III donne $AvdV + BudU = o$; or, la I. $AdV + BdU = o$ jointe à celle-là nous fera voir que $v = u$, ou que les corps après le choc se meuvent d'un mouvement commun. Outre cela, ayant déjà trouvé $V = v$ et $U = u$, nous aurons $Adv + Bdu = o$ et partant $Av + Bu = \text{const.} = Aa + Bb$, et nous fait connaître que la quantité du mouvement est la même après et avant le choc. Cette circonstance déterminant tout à fait le choc des corps non élastiques, il reste encore indécidé si la fonction P est égale à la force même p ou non.

Pour les corps élastiques le choc cesse dès que l'intervalle z redevient égal à c; et partant l'expression $f : (c - z)$ sera la même après le choc et avant; donc par IV. la valeur $A\int vdV + B\int udU$ sera aussi la même après et avant le choc. Or ayant trouvé $V = v$ et $U = u$, ce sera la somme des forces vives $Av^2 + Bu^2$, qui sera la même tant après qu'avant le choc. Par conséquent les lois connues du choc laissent encore indéterminée la formule qui renferme les règles mécaniques; et elles ne montrent que $Pdt = -Adv$ et $Pdt = Bdu$, et il reste encore indécidé quelle fonction la lettre P doit être de la force sollicitante p.

Cependant les autres expériences tirées de la chute des corps et du mouvement des pendules montrent très évidemment que $P = p$, et par là on est assuré de la vérité des lois générales du mouvement. Mais c'est une question tout à fait différente, si cette vérité (qui ne peut être révoquée en doute dans ce monde) est nécessaire ou contingente, ou s'il eût été possible à Dieu de créer un tel monde, dans lequel d'autres lois eussent été observées : par exemple, que $Adv = p^2dt$, ou que $AvdV = pdt$, ou d'autres formules différentes

de celle-ci $Adv = pdt$. MM. Leibniz et Wolff ont soutenu cela, et n'ont regardé la formule $Adv = pdt$ que comme une vérité attachée à ce monde, ou peut-être seulement à notre terre; croyant que dans les autres corps célestes peut-être d'autres formules aient lieu. Pour moi je suis d'un sentiment tout à fait différent, et je crois avoir démontré que cette vérité est aussi nécessaire que celles de la géométrie. J'ai fait cela dans le Ier volume de ma mécanique, mais je crois avoir mis cette matière dans un plus grand jour dans la suite de cet ouvrage, dont je prends la liberté de vous envoyer les premières feuilles où j'ai traité cette matière.

. . . .

(26 *avril* 1748.)

. . . .

Je travaille actuellement à une pièce sur un grand nombre de courbes mécaniques, que je détermine premièrement par les principes de mécanique, mais ensuite je cherche les expressions dont les valeurs deviennent un *minimum* dans ces mêmes courbes, pour connaître *a posteriori*, dans chaque cas, les formules qui représentent ce que vous nommez la quantité d'action; et je crois qu'il sera alors d'autant plus facile de découvrir ces mêmes formules *a priori*.

(3 *mai* 1748.)

MONSIEUR,

J'ai l'honneur de vous envoyer ma pièce sur les *minima* qui se trouvent dans les courbes formées par l'action des forces quelconques. Ces recherches m'ont coûté beaucoup de peine, mais j'en suis bien récompensé de voir que vos principes, que vous employez pour exprimer la quantité d'action, sont beaucoup plus généraux que je n'aurais pensé; et qu'ils sont applicables non seulement à toutes sortes de forces mais aussi à la force d'élasticité. Comme c'est la métaphysique qui doit fournir les fondements sur lesquels sont fondés ces principes, je crois que le développement de cette matière pourra considérablement perfectionner cette science. Peut-être que cette matière pourrait fournir une question digne d'être proposée pour le prix de la classe de Mathématique, quoique je ne voie pas encore comme on la pourrait proposer convenablement. Cependant, comme le terme de la proposition d'une telle question approche, je prends la liberté de joindre ici mon projet, que j'ai présenté à l'Académie il y a 4 ans pour le même but; dont on a choisi

la IVe question. L'Académie de Paris ayant déjà saisi la troisième, il n'en reste que la Ire et la IIe qui peuvent entrer en considération.

. . . .

(8 *mai* 1748.)

MONSIEUR,

Il est bien vrai que, lorsque je composai ma dernière pièce sur les *minima*, je n'avais pas devant les yeux votre excellente pièce sur la loi du repos, et je me fiais uniquement à ce que je m'en pouvais rappeler, et à quelques notes que je me suis marqué dans... mes adversaires, quand je lus votre pièce. Et je crois encore que mes formules pour les *minima* sont parfaitement d'accord avec vos principes et qu'elles même en suivent immédiatement. S'il paraît du premier coup d'œil qu'il s'y trouve quelque différence, cela ne vient que de ce que vous avez appliqué vos principes à la recherche de la figure d'une masse fluide dont toutes les particules sont sollicitées vers quelques points fixes, au lieu que j'ai considéré des fils flexibles sollicités d'une manière semblable. Je me souviens trop clairement qu'en appliquant vos principes au cas de la pesanteur ordinaire, ils se réduisent à la plus grande descente du commun centre de gravité; or cette descente est précisément le contenu de mes formules pour ce même cas.

Si vous m'accordez, Monsieur, que la méthode dont on trouve la *catenaria* en supposant la descente du centre de gravité, ou plutôt la distance de ce centre au centre de la terre un *minimum* est conforme à vos principes, le même accord doit nécessairement se trouver dans toutes mes formules, car elles n'exigent que le plus grand approchement total de tout le corps vers les points vers lesquels il est sollicité. Or cette propriété de la *catenaria* découle si naturellement de vos principes que je ne m'attends à aucune exception de cet endroit-là.

De plus, je me souviens encore trop bien du cas de votre pièce où la masse fluide est supposée être attirée vers plusieurs points fixes. Soit la particule M attirée vers les points A, B, C, D, etc., par des forces qui soient comme les puissances des distances AM^{α}, BM , CM^{γ}, DM^{δ}, etc. Alors vous démontrez que cette formule :

FIG. 3

$$\frac{AM^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{BM^{\beta+1}}{\beta+1} + \frac{CM^{\gamma+1}}{\gamma+1} + \frac{DM^{\delta+1}}{\delta+1} + \text{etc.}$$

sera un *minimum*. Or il est clair que cette formule n'est autre chose que celle-ci :

$$\int AM^{\alpha}.d.AM + \int BM^{\beta}.d.BM + \int CM^{\gamma}.d.CM + \int DM^{\delta}.d.DM + \text{etc.}$$

Soient les distances $AM = v$, $BM = v'$, $CM = v''$,. $DM = v'''$, etc., et, pour rendre le cas plus général, soient les forces comme des fonctions quelconques de ces distances, c'est-à-dire la force $MA = V$, la force $MB = V'$, la force $MC = V''$, la force $MD = V'''$, etc. Dans ce cas, en vertu de votre règle, cette formule :

$$\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \int V''' dv'''$$

sera un *minimum* où son différentiel doit être supposé $= o$, pour trouver la figure d'une masse fluide qui est attirée à ces points A, B, C, D, etc. ; et, dans ce cas, je crois que je ne me trompe pas au sujet du contenu de votre pièce. Or cette même expression est précisément celle dont ma formule est composée, quand je veux déterminer la figure d'un fil flexible dont tous les éléments Mm sont attirés par les mêmes forces V, V', V'', V''', etc., vers les points fixes A, B, C, D, etc. Toute la différence ne consiste qu'en ce que dans le cas que vous traitez, cette expression :

$$\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \int V''' dv''', \text{ etc.,}$$

doit être un *minimum*, au lieu que pour le fil flexible dont $Mm = ds$ est un élément, cette formule :

$$\int ds \left(\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \int V''' dv''', \text{ etc.}\right)$$

est un *minimum*. Or, comme ces deux cas sont bien différents entre eux, et que la figure d'un fil flexible est très éloignée de celle qu'une masse fluide, quoique sollicitée par les mêmes forces, doit prendre, il n'est pas étrange que ces deux formules ne soient pas précisément les mêmes; cependant on y remarque d'abord un si grand accord, qu'il ne peut y avoir aucun doute que l'une et l'autre soient fondées sur les mêmes principes. C'est cette harmonie admirable dont j'ai eu l'honneur de vous dire que j'ai été frappé, et j'espère qu'après ces éclaircissements vous ne trouverez plus de difficultés de m'accorder les expressions dont je me suis servi dans ma pièce pour remarquer le parfait accord de mes formules avec votre théorie. Cependant, si vous le jugez à propos, j'y pourrai joindre encore ces mêmes réflexions que je viens de faire, afin que tout le monde soit convaincu de cet accord, qui me paraît autant parfait qu'il est possible pour des cas si différents; et c'est de quoi je vous prie de m'honorer de vos instructions.

Je dois encore remarquer que je crois que les formules du *minimum* que j'ai données sont les uniques qui conduisent aux courbes

que je cherche. Car, quoique je puisse donner encore d'autres formules dont la valeur fût aussi la moindre dans ces courbes, pourtant les équations que ces formules donneraient selon ma méthode sont trop générales et renferment aussi des courbes qui n'ont aucun rapport à mon sujet, au lieu que mes formules ne renferment rien qui ne convienne aux problèmes que j'ai en vue.

. . . .

(9 *mai* 1748.)

. . . .

Je me flatte que vous ne douterez plus ni de la justesse de ma formule du *minimum*

$$\int ds \left(\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \int V''' dv''' + \text{etc.}\right)$$

pour la figure d'un fil parfaitement flexible, ni de la conformité de cette formule avec celle $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$, etc. que vous trouvez pour la figure d'une masse fluide qui est sollicitée par les mêmes forces; et je ne doute pas que les mêmes principes qui vous ont conduit à votre formule, dont je ne me souviens plus assez exactement, ne conduisent à ma formule, pourvu qu'on ait dûment égard à la nature du cas que je traite. Je viens de découvrir une formule presque semblable pour un cas tout à fait différent. Si le mobile M est attiré vers les points fixes, C, C', C'', C''', par les forces V, V', V'', V''', qui sont des fonctions quelconques des distances, $CM = v$, $C'M = v'$, $C''M = v''$, $C'''M = v'''$, et que ce mobile décrive librement la courbe MN, je dis que pour cette courbe la valeur de cette formule

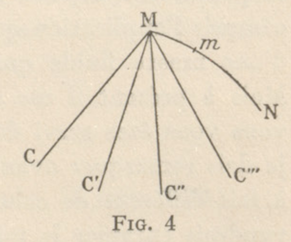


Fig. 4

$$\int dt \left(\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''\right)$$

sera un *minimum* où *dt* marque le temps que le mobile met à parcourir l'élément de l'espace M*m*. Cette formule est d'accord avec celle que je donnai autrefois $\int u ds$, où *u* me marquait la vitesse du corps en M et *ds* l'élément d'espace M*m*, car puisque $ds = u dt$ cette formule se change en celle-ci $\int uu dt$, et, selon les lois de la mécanique, la valeur de *uu* s'exprime par $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$. Je m'imagine qu'en envisageant bien ces cas et les diverses manières dont cette même formule $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ entre dans chacun d'eux, il ne sera plus si difficile de découvrir les principes de la métaphysique qui doivent conduire à ces formules; et quand même

on ne serait pas encore en état d'arriver à ce but, on devrait pourtant conclure, de la belle harmonie de ces formules, qu'elles doivent nécessairement partir des mêmes principes; tant s'en faut, à mon avis, qu'une de ces formules dût en aucune manière déroger à la vérité des autres.

. . . .

(4 *juin* 1748.)

. . . .

Une chose me tient encore à cœur, par rapport à ma pièce sur les *minima* qui se trouvent dans les courbes que forment des fils, soit parfaitement flexibles, soit élastiques, étant sollicités par des forces quelconques. J'avais pris la liberté de vous étaler toutes mes réflexions, qui me convainquent que mes formules ne sont pas contraires à la théorie que vous avez donnée, mais je crois que votre dernière maladie vous a empêché de peser mes réflexions. Oserai-je donc vous supplier, Monsieur, de daigner encore de quelque attention mes lettres, que j'avais pris la liberté de vous adresser alors à Potsdam. Je suis bien sûr que vous ne trouverez plus la moindre contrariété entre vos principes et mes formules, mais que vous recon. naîtrez la grande ressemblance que j'avais dit qu'elle s'y trouve- Il est vrai qu'alors je ne voyais pas encore comment mes formules se pourraient déduire de vos principes, quoique j'eusse fort bien compris l'application que vous en avez faite pour trouver la figure d'une masse fluide qui est sollicitée par des forces quelconques. Mais à présent il me semble que les mêmes raisonnements dont vous vous êtes servi doivent conduire à mes formules : desquelles je dois remarquer avant toute chose qu'elles regardent un cas tout à fait différent de celui que vous avez considéré. Voilà comme je voudrais entamer le raisonnement.

Soient autant de centres de forces qu'on voudra, leurs distances à un point donné, v, v', v''; v''', etc. et leurs forces motrices sur ce point, V, V′, V″, V‴, etc., fonctions quelconques des distances. Alors, en considérant une masse fluide sollicitée par ces forces, la quantité d'action de toutes ces forces doit être un *minimum* ou son différentiel $= o$. Or vous faites voir très solidement que cette quantité d'action s'exprime par $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' +$ etc. Maintenant, en considérant un fil flexible sollicité par ces mêmes forces, pour en déterminer la figure, il ne suffira plus d'avoir égard seulement à la quantité d'action des forces, qui demeurera comme auparavant $= \int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' +$ etc. (puisqu'il est évi-

dent que le fil flexible doit prendre une figure bien différente de celle qui convient à la masse fluide), mais cette quantité d'action doit être appliquée aux éléments du fil sur lesquels l'action se fait. Soit donc ds l'élément du fil, et l'action des forces appliquées à cet élément sera $= ds\,(\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' +$ etc.). A présent il me paraît fort naturel de dire que, dans ce cas, la somme de toutes les actions des forces appliquées aux éléments du fil doit être un *minimum*. C'est-à-dire pour la figure du fil cette formule $\int ds\,(\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' +$ etc.) sera un *minimum*.

De plus, en considérant un corps projectile attiré par ces mêmes forces, pour trouver la courbe qu'il décrira, il me semble également naturel de soutenir que dans cette courbe la somme de toutes les quantités d'action des forces appliquées aux éléments du temps doit être un *minimum*. Or la quantité d'action de ces forces est suivant vos principes $= \int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' +$ etc.; donc nommant dt l'élément du temps, dans ces courbes projectoires cette formule $\int dt\,(\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' +$ etc.) doit être un *minimum*, ce qui est aussi vrai au pied de la lettre.

Après ces nombreux éclaircissements, je n'ai qu'à vous supplier encore très humblement, Monsieur, de les lire avec quelque attention, étant bien assuré que vous porterez alors un jugement plus favorable de ma pièce, qui a eu le malheur de vous paraître contraire à vos principes. Il m'est trop important que vous changiez de sentiment sur cette matière, et dans cette vue j'espère d'obtenir de votre bonté d'autant plus facilement le pardon, si mes justifications réitérées vous deviennent incommodes.

. . . .

(8 *juin* 1748.)

MONSIEUR,

Je vous suis infiniment obligé de l'explication que vous m'avez bien voulu donner de votre sentiment au sujet de la quantité d'action et des formules dont la valeur est un *maximum* ou un *minimum* dans les courbes produites par les forces. Avant cette explication je ne pouvais comprendre que fort obscurément, en quoi pourrait consister la différence entre vos idées et ce que j'avais avancé sur cette matière, ce qui augmentait beaucoup mon inquiétude. Mais à présent, étant suffisamment éclairci à cet égard, j'avoue franchement que j'ai eu tort de donner le nom de quantité d'action à plusieurs formules bien différentes entre elles, sans que j'eusse compris comment je pourrais justifier cette dénomination.

A cela près, je suis à présent assuré plus que jamais que les formules des *maxima* et *minima* que j'ai trouvées *a posteriori* n'apportent la moindre atteinte à la justesse des principes sur lesquels vous avez fondé vos raisonnements. Pour m'expliquer plus précisément là-dessus, je considérerai plusieurs centres de forces C, C′, C″, etc., dont les distances à un point quelconque M soient :

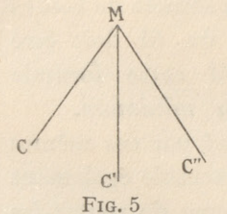


Fig. 5

$$CM = v, \ C'M = v', \ C''M = v'', \text{ etc.}$$

et les forces dont ce point M est attiré vers ces centres soient V, V′, V″, etc., fonctions quelconques des distances, v, v', v'', etc. Maintenant il s'agit de trouver la figure d'une masse fluide attirée par ces forces dans la surface de laquelle soit le point M; je trouve, conformément à vos principes, cette équation :

$$\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \text{etc.} = \text{const.}$$

ou puisque le différentiel de cette quantité est $= o$, on pourra dire que la valeur de cette formule $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' +$ etc., est un *maximum* ou *minimum*, et c'est cette formule qui exprime selon vous, Monsieur, la quantité d'action des forces V, V′, V″, etc., en tant qu'elles agissent sur le point M. A présent, en considérant un autre cas, où le point M soit un élément d'un fil flexible suspendu par ses deux bouts, vous m'accorderez d'abord que la figure que prendra ce fil sera bien différente de celle de la masse fluide : car s'il n'y avait qu'un seul centre de forces C, éloigné à l'infini, pour avoir le cas de la gravité naturelle, la figure d'une masse fluide deviendrait un plan horizontal, au lieu qu'un fil suspendu prendrait la figure de la chaînette. De là, il est clair que la formule qui sera un *minimum* pour la figure du fil doit être bien différente de celle qui est un *minimum* pour la figure de la masse fluide; donc, puisque la formule $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' +$ etc. est un *minimum* pour ce dernier cas, elle ne sera pas un *minimum* pour la figure du fil; quoiqu'il semble que cette même formule exprime la quantité d'action des forces sur le point M aussi bien dans l'un que dans l'autre cas. D'où il s'ensuit nécessairement, puisque les formules qui sont un *minimum* dans ces deux cas différents ne peuvent être les mêmes, ou que les quantités d'action des forces sur le point M ne sont pas les mêmes, ou que les formules du *minimum* dans ces deux cas n'expriment point la quantité d'action des forces. Je ne voudrais pas soutenir le dernier, puisqu'il me paraît très raisonnable que l'on estime la quantité d'action des forces par la même formule, qui est un *minimum*, mais il me semble que pour avoir la

quantité d'action, il ne suffit pas d'avoir égard seulement aux forces qui agissent, mais qu'il faut aussi regarder la nature du corps qui en est sollicité. Dans cette vue, je voudrais nommer cette formule $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' +$ etc. la quantité d'action absolue des forces sur le point M, où l'on ne fait attention à la nature du corps auquel appartient le point M; et il me paraît assez clair que, puisqu'une masse fluide obéit partout librement à l'action des forces, ce sera la quantité d'action absolue qui doit être un *minimum*. Mais il est également clair, si le point M est un élément d'un fil suspendu, qui ne saurait plus obéir si librement à l'action des forces sollicitantes, que sa courbure ne dépend plus uniquement de la quantité d'action absolue, mais qu'il y faut joindre quelque chose qui renferme la nature du fil : je voudrais nommer cela qui résulte de cette application, la quantité d'action absolue des forces appliquée au cas présent du fil; et comme j'ai trouvé que si l'on nomme ds l'élément du fil au point M, la valeur de cette formule $\int ds\,(\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' +$ etc.) sera la plus petite dans la figure du fil; puisque $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' +$ etc. est la quantité d'action absolue des forces, je dirais que cette formule $\int ds\,(\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' +$ etc.) est la quantité d'action appliquée à la nature du fil.

De même, si le point M marque un corps projeté d'une manière quelconque, et qu'on voulût déterminer la courbe qu'il décrira, la formule $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' +$ etc., sera encore la quantité d'action absolue des forces, mais la quantité d'action appliquée à ce cas, dont la valeur est effectivement un *minimum*, sera $\int dt\,(\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' +$ etc.), où dt marque l'élément du temps. Cette dernière formule étant parfaitement d'accord avec celle-ci $\int u ds$ (où ds marque l'élément de l'espace, et u la vitesse du corps, car $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' +$ etc., exprime le carré de la vitesse uu, et udt est $= ds$), que vous aviez tirée immédiatement de vos principes : il est impossible qu'il se trouve la moindre opposition réelle entre vos principes et les formules que j'ai tirées *a posteriori* : ce ne seront peut-être que quelques expressions mal choisies, dont je me suis servi, qui vous ont pu paraître contraires à celles que vous avez employées; de sorte que je n'aurais qu'à changer quelques mots dans ma pièce, pour en ôter tout ce qui pourrait sembler incompatible avec votre théorie. Je vous supplie, Monsieur, de daigner de quelque attention ce que je prends la liberté de vous exposer sur ce sujet, et de me dire franchement si vous en êtes satisfait. Car je serais au désespoir si je vous avais donné lieu de soupçonner avec raison que j'eusse voulu chercher des détours pour

vous faire croire par de vains compliments que j'adopte vos idées, tandis que je les adoptais en effet. J'ai été plutôt tout ravi que la formule $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' +$ etc., que vous nommez quantité d'action s'est rencontrée partout dans toutes mes recherches, et j'ai cru qu'on n'en puisse pas assez relever le prix. Mais surtout ai-je été transporté de joie, quand je vis que l'action de l'élasticité, qui jusque-là m'était un nœud irrésoluble, suivait parfaitement les mêmes lois que l'action des forces ordinaires contenue dans la formule $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' +$ etc. Dans cet état, je ne vous puis pas exprimer combien j'ai été affligé, quand j'appris que vous n'étiez pas content de mon ouvrage; mais à présent je suis d'autant plus réjoui que vous m'avez fait la grâce de vous expliquer sur ce sujet, puisque j'espère que ma justification ne manquera de vous convaincre de ma droiture. Je travaille actuellement à une autre pièce sur cette même matière, où je fais voir encore dans un plus grand nombre de cas différents l'importance et l'étendue de votre formule $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' +$ etc., et je me flatte qu'après ces éclaircissements vous en serez parfaitement content.

. . . .

(14 *juin* 1748.)

Monsieur,

Je viens d'achever mes recherches sur le principe de la quantité d'action et je prends la liberté de vous les envoyer, en vous priant très humblement de les daigner de quelque attention. Je me flatte que vous en serez tout à fait content, et que vous y trouverez votre grand principe de la quantité d'action le mieux établi, et appliqué en sorte au cas que j'y traite que vous remarquerez partout la plus belle conformité à vos idées. Car je dois avouer que, dans ma pièce précédente, je ne voyais pas encore assez clair dans cette matière; mais à présent tout me paraît lumineux et je n'y trouve plus aucun doute. La pièce que j'ai l'honneur de vous présenter roule sur trois articles : le premier regarde l'estime de la quantité d'action des forces quelconques, où je fais voir que, si un point est attiré vers plusieurs centres fixes C, C′, C″, etc., par les forces V, V′, V″, etc., qui sont des fonctions quelconques des distances v, v', v'', etc. de ce point à ces centres, alors la quantité d'action de ces forces sur ce point sera $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' +$ etc., ce qui est parfaitement d'accord avec la manière dont vous vous êtes servi pour exprimer la quantité d'action dans votre pièce sur la loi générale du repos.

Dans l'article second, je soutiens que, lorsqu'un corps quelconque (soit qu'il soit solide ou fluide, flexible ou raide, ou élastique) sollicité par ces forces se trouve en équilibre, alors la somme de toutes les actions exprimées selon le premier article qui agissent sur tous les éléments du corps sera un *minimum*. Ce seul principe me fournit la figure d'une masse fluide quelconque, la courbe que forme un fil quelconque soit flexible ou élastique. Or ce principe est non seulement d'accord avec votre théorie, mais il est aussi le même que vous avancez.

Le troisième article roule sur le mouvement d'un corps attiré par ces mêmes forces, et je prouve que ce mouvement aura toujours cette propriété que la somme de toutes les quantités d'action que le corps éprouve à chaque instant sera un *minimum*. Je suis d'autant plus sûr que vous conviendrez aussi de ce principe, puisqu'il revient à celui d'où j'ai déduit les orbites des planètes et d'autres corps attirés par des forces quelconques dans mon traité *de maximis et minimis*.

En conformité de ces nouvelles lumières que je me suis acquises, je ferai quelques changements dans les expressions de ma pièce précédente sur cette matière, qui peuvent paraître de renfermer quelque chose de contraire à votre théorie et à mes dernières recherches.

. . . .

(14 *février* 1758.)

La date de cette lettre nous paraît incertaine. La première phrase de l'extrait que nous en donnons devrait la faire placer en 1748, car c'est au cours de cette année-là que fut imprimé le volume des mémoires de l'Académie de Berlin pour 1746, et précisément le mémoire de Maupertuis sur *Les lois du mouvement et du repos déduites d'un principe métaphysique* s'y trouve inséré au début de la classe de philosophie, immédiatement à la suite de la classe de mathématique. En ce cas, la phrase suivante nous permettrait de constater que le mémoire en question a été inséré par anticipation dans les mémoires de l'année 1746, mais présenté effectivement en 1748 seulement.

Par contre les allusions au différend avec Kœnig doivent assigner à cette lettre une date postérieure à 1751, mais il devient difficile de faire cadrer une telle chronologie avec le contexte précédent, alors que l'on ne verrait guère de quel autre mémoire il pourrait s'agir.

De toute façon, la date de 1758 ne peut s'accorder avec la biographie de Maupertuis, à moins qu'il ne s'agisse de l'*Examen philosophique de la preuve de l'existence de Dieu employée dans l'Essai de cosmologie* (Mém. Acad. Berlin, 1756).

. . . .

Comme la classe de mathématique était presque finie, quand nous reçûmes votre excellent mémoire, il est mis à la tête de la classe de philosophie spéculative. La première partie fut lue à l'assemblée publique et l'autre aux ordinaires. Il est surprenant que votre

principe de la moindre action puisse encore être exposé à la moindre contestation, après tant d'explications et applications qu'on en a faites. Mais il est encore plus surprenant que vos envieux aient pu attendre quelque chose là-dessus de Kœnig, qui n'a jamais rien produit qui vaille. Il n'y a aucun doute que votre principe ne s'étende encore beaucoup plus loin qu'on ne l'a étendu jusqu'ici. Je crois que le cas suivant, où il ne s'agit pas simplement d'un *minimum*, mais d'un *minimum minimorum*, pourrait frapper plusieurs antagonistes.

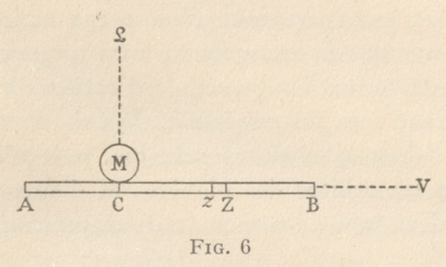


Fig. 6

Problème : le globe M venant frapper avec une vitesse donnée perpendiculairement une barre AB en repos, trouver le mouvement du globe et de la barre après le choc (en supposant l'un et l'autre non élastiques).

Solution : soit M la masse du globe, et sa vitesse $= a$ dont il heurte la barre dans la direction £C, qui est perpendiculaire. Soit x la vitesse du globe après le choc, et partant $M(a - x)^2$ sera l'action produite dans le globe.

Or le choc imprimera à la barre un mouvement qui, au premier instant, se fera autour d'un certain point V inconnu, mais qui sera tel que l'action totale devienne la plus petite. Il s'agit donc de déterminer non seulement la vitesse x, mais aussi le point V, afin que la somme des actions produites dans le globe et la barre ensemble soit la plus petite.

Pour cet effet, posons la masse de la barre $= N$, sa longueur $AB = b$, et ses parties $AC = c$ et $BC = e$, de sorte que $b = c + e$; et soit la distance inconnue $CV = v$; maintenant les corps n'étant pas élastiques, la vitesse du point C après le choc sera aussi $= x$. Considérons un élément de la barre Zz posant la distance $VZ = z$ et la masse de cet élément sera $= \frac{Ndz}{b}$, et la vitesse $= \frac{xz}{v}$, donc l'action qui y est produite $= \frac{Ndz}{b} \cdot \frac{xxzz}{vv}$, et son intégrale $=$ $\frac{Nxxz^3}{3bvv}$ + const., d'où nous concluons l'action produite dans la barre

$$\text{entière} = \frac{Nxx}{3bvv} \cdot [(v+c)^3 - (v-e)^3]$$

$$= \frac{Nxx}{3bvv}(3cvv + 3evv + 3ccv - 3eev + c^3 + e^3)$$

$$= \frac{Nxx}{3vv}(3vv + 3(c - e)v + cc - ce + ee) \text{ à cause de } b = c + e.$$

De là l'action totale est $M(a - x)^2 + Nxx\left(1 + \frac{c - e}{v} + \frac{cc - ce + ee}{3vv}\right)$ où il faut chercher tant x que v qu'elle devienne un *minimum*.

Considérons d'abord x comme ayant déjà sa juste valeur, et pour chercher celle de v la différentiation donne

$$-\frac{(c - e)\,dv}{vv} - \frac{2(cc - ce + ee)dv}{3v^3} = o \text{ ou } v = \frac{2(cc - ce + ee)}{3(e - c)},$$

cette valeur étant substituée donne l'action totale =

$$M(a - x)^2 + \frac{N(c + e)^2 xx}{4(cc - ce + ee)} \text{ qui}$$

doit encore être un *minimum* par rapport à x; ce qui donne

$$-2M(a - x) + \frac{Nbbx}{2(cc - ce + ee)} = o \text{ ou } x = \frac{4Ma(cc - ce + ee)}{4M(cc - ce + ee) + Nbb}$$

1. Si le globe frappait la barre au milieu de sorte qu'il soit $c = e$ et $b = 2c$, on aurait le cas ordinaire, savoir $v = CV = \infty$, ou la barre ne tournerait pas, et $x = \frac{Ma}{M + N}$, qui sera la vitesse commune des deux corps.

2. Si le globe frappait à un bout A de sorte que $c = o$ et $e = b$, on aura $v = AV = \frac{2}{3}b$ et $x = \frac{4Ma}{4M + N}$.

On pourrait imaginer des cas où il faudrait déterminer trois ou plusieurs inconnues pour rendre l'action totale un *minimum*, et le résultat sera toujours d'accord avec celui qu'on trouverait par la méthode ordinaire.

. . . .

NOTES

(98) *Harmonie entre les principes généraux de repos et de mouvement de M. de Maupertuis* (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1751). — *Examen de la dissertation de M. le Professeur Koenig insérée dans les Actes de Leipzig pour le mois de mars 1751* (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1751). *Addition à cet examen* (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1751). — *Sur le principe de la moindre action* (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1751). — *Dissertatio de principio minimæ actionis una cum examine objectionum Prof. Koenigii*, 1 vol. in-8, Berlin, 1753 ; et aussi en français : *Dissertation sur le principe de la moindre action, avec l'examen des objections du professeur Kœnig faites contre ce principe*, Leyde, 1753.

(99) Pour cette lettre et les suivantes, voir : Fuss, *Correspondance*

mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIe siècle, 2 vol., Saint-Pétersbourg, 1843.

(100) *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes,* 1 vol. in-4, Lausanne, 1744. Il est intéressant de noter la quasi-simultanéité de la découverte d'Euler et de l'énonciation du principe de la moindre action par Maupertuis. Celui-ci fait d'ailleurs explicitement allusion à cette correspondance chronologique, dans une note placée en tête de son mémoire de 1746. Dans son intéressant ouvrage sur *Leonhard Euler* (Leipzig, 1929), Otto Spiess considère qu'Euler était en droit de revendiquer pour lui la découverte. (Voir spécialement *Op. cit.,* p. 125.) J. A. Serret estime que « la première idée de la propriété qui constitue le principe de *la moindre action* est due à Euler ; ce grand géomètre démontra effectivement, dès 1744, à la fin de son traité des isopérimètres, que, dans les trajectoires décrites par des forces centrales, l'intégrale de la vitesse multipliée par l'élément de la courbe est toujours un *maximum* ou un *minimum* ». Prolongeant un peu plus loin ce rapide coup d'œil historique, le même auteur continue : « Lagrange montra ensuite, en 1760, que la même propriété peut être étendue au mouvement d'un système quelconque de corps, pourvu que le *principe des forces vives* ait lieu, et il en développa l'application à la solution d'un assez grand nombre de problèmes. Aussi, l'illustre auteur de la *Mécanique analytique* jugea-t-il plus tard que la propriété dont il s'agit méritait, à raison de son importance, de faire l'objet d'un nouveau principe général de dynamique, qu'il appela de *la moindre action,* sans se dissimuler la défectuosité de cette dénomination, renouvelée de Maupertuis. » (*Mémoire sur le principe de la moindre action,* C. R. Ac. des Sc., 12 juin 1871, p. 697-698). C'est évidemment faire bien minime la part de Maupertuis que de borner son rôle à l'imposition d'une dénomination, d'ailleurs défectueuse ; et l'on comprend assez mal, dès lors, pourquoi Lagrange aurait eu l'idée de faire, à un auteur dont l'originalité se serait bornée à cela, un aussi singulier et paradoxal emprunt. En réalité, comme nous ne tarderons pas à le montrer, l'influence de Maupertuis non seulement sur Euler, mais encore sur Lagrange, fut beaucoup plus profonde qu'on ne pourrait le supposer de prime abord. En ce qui concerne Euler, il nous paraît que mettre en doute la sincérité de ses affirmations réitérées sur la priorité de Maupertuis, c'est exagérer singulièrement son attitude de respect amical vis-à-vis du président de l'Académie de Berlin, jusqu'à la faire confiner, contre toute vérité, à la flatterie plus ou moins intéressée. Notons que, dès 1811, de Fortia d'Urban (*Op. cit.,* p. 310) écrivait, dans le même sens, sur cette question : « ...le principe de la moindre action dont on doit regarder Euler comme le véritable inventeur... »

(101) En raison des confusions que pourrait créer toute traduction trop directement calquée sur le terme *projecta,* nous préférons employer ici un mot assez vague, dont le seul mérite est d'écarter, autant que possible, tout rapprochement avec l'expression « projectiles », au sens de la balistique.

(102) Nous ne tarderons pas à voir encore de façon explicite quelle

place tiennent les considérations métaphysiques dans la pensée mathématique d'Euler. Dans un autre appendice (*De Curvis elasticis*) à sa *Methodus,* il fait intervenir des considérations finalistes, singulièrement analogues d'ailleurs à celles de Leibniz, et rattache à ces vues téléologiques la méthode des *maxima* et *minima :* « Puisque donc il s'ouvre une double voie pour connaître les effets de la nature : l'une par les causes efficientes, que l'on a coutume d'appeler méthode directe, l'autre par les causes finales, le mathématicien use de l'une et de l'autre avec un égal succès. » Après avoir débuté par cette remarque, Euler continue, un peu plus loin : « Puisque la construction de l'ensemble du monde est la plus parfaite, et achevée par un créateur très sage, il n'arrive absolument rien dans le monde où n'éclate quelque raison de *maximum* ou de *minimum ;* c'est pourquoi il n'y a absolument aucun doute que tous les effets du monde ne puissent être déterminés en partant des causes finales, à l'aide de la méthode des *maxima* et *minima,* avec autant de succès qu'en partant des causes efficientes elles-mêmes. » (*Op. cit.,* p. 245).

(102 *bis*) Le texte imprimé d'Euler porte v et non $\sqrt{v}$, qu'exigent les formules suivantes et que pour cette raison nous avons jugé opportun de rétablir. Sans doute ne faut-il voir là, en effet, qu'une faute d'impression ayant échappé à l'auteur lors de la correction des épreuves. Certes, il peut paraître surprenant de voir Euler désigner la vitesse par $\sqrt{v}$ et non par v ; mais la chose s'explique assez bien, si l'on considère que de cette manière on évite de faire intervenir a^2 dans la dernière des formules, ce que l'auteur a vraisemblablement cherché. Signalons dès maintenant que, dans un mémoire postérieur, dont nous aurons bientôt à nous occuper, Euler, en faisant allusion au texte que nous considérons en ce moment, emploie cette fois la formule $\int v\, ds$ au lieu de $\int ds \sqrt{v}$. Cela est d'autant moins étonnant que n'ayant plus alors autre chose en vue que la détermination du *minimum,* Euler devait tout naturellement trouver plus simple de revenir à la désignation courante de la vitesse par v.

(103) On voit comment Euler tient à rester à l'écart des discussions concernant les forces vives. Nous nous contentons de signaler ici le fait, sans entrer dans l'examen de la question si débattue vers le milieu du XVIIIe siècle.

(104) E. Jouguet fait remarquer, à ce propos, que « c'est, énoncée sous une forme un peu moins générale, la restriction aux termes de laquelle le principe de la moindre action exige que les forces admettent un potentiel ». (*Lectures de mécanique,* vol. I, p. 204, note 218).

(105) *Recherches sur les plus grands et les plus petits qui se trouvent dans les actions des forces.* (*Mémoires de l'Académie de Berlin,* 1748, p. 150).

(106) Nous renvoyons pour plus de détails aux histoires des mathématiques et aux œuvres de Jean Bernoulli (*Opera omnia,* 4 vol. in-4, Lausanne et Genève, 1742, et *Commercium philosophicum et mathematicum Leibnitii et Johannis Bernoullii,* 2 vol. in-4, Lausanne et Genève, 1745).

(107) *Op. cit.,* p. 151.

(108) *Op. cit.*, p. 151-152.

(109) *Léonard Euler et ses amis, Paris,* 1927, p. 67.

(110) Euler, *Op. cit.*, p. 152-153.

(111) *Réflexions sur quelques lois générales de la nature qui s'observent dans les effets des forces quelconques* (*Mémoires de l'Académie de Berlin,* 1748, p. 189 et suiv.). Relevons au passage une phrase qui pourrait laisser douter de la priorité de Maupertuis dans l'énonciation du principe de la moindre action : « Comme il y a longtemps que les philosophes soutiennent, avec bien de la raison, que la nature, dans toutes ses productions, affecte constamment un certain minimum, ce que M. de Maupertuis a mis tout à fait hors de doute... » Remarquons qu'à l'époque où ce mémoire fut rédigé la querelle avec Kœnig n'ayant pas encore été soulevée, Euler (pas plus d'ailleurs que Maupertuis, qui alors ne releva pas ce propos) ne se préoccupait pas de faire ressortir l'originalité du principe de la moindre action par rapport à celui de la simplicité des voies de la nature. Ce ne peut être en effet qu'à ce dernier principe que fait allusion Euler en employant l'expression « il y a longtemps que... ». Le principe de la moindre action devait, à ce moment-là, lui apparaître comme une sorte de spécification du principe, plus général et beaucoup plus indéterminé, de la simplicité des voies. C'est cette interprétation que rend seule plausible la suite du texte, lorsque Euler se réfère de nouveau explicitement à Maupertuis.

(112) *Op. cit.*, p. 190-191.

(113) *Op. cit.*, p. 217.

(114) Par contre, Ernst Mach paraît bien un peu exagérer lorsqu'il prétend que, tandis que la pensée d'Euler se prête facilement à des exemples simples, il est bien difficile de se faire une idée claire des conceptions de Maupertuis (voir *Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt,* 5. Aufl., Leipzig, 1904, p. 496. Voir aussi p. 406-424). Il aurait pu se contenter de noter, comme il le fait d'ailleurs accessoirement, qu'à Euler revient le grand mérite d'avoir fait du principe de la moindre action de Maupertuis une chose nouvelle, pratique et utilisable. Il reconnaît du reste que « bien que Maupertuis n'eut pas la puissance nécessaire à la réussite, son effort pour pénétrer plus profondément dans les phénomènes ne fut pas stérile : il fut un précieux stimulant pour Euler et peut-être aussi pour Gauss ». (D'après la traduction fr. par Emile Bertrand, Paris, 1904, p. 349.)

(114 *bis*) Ces lettres, qui faisaient partie de la succession de Maupertuis, passèrent, conformément aux dispositions testamentaires de celui-ci, en la possession de La Condamine, à qui revint la plus grande partie des papiers scientifiques du président de l'Académie de Berlin. C'est ainsi qu'elles furent longtemps conservées, avec quantité d'autres adressées à Maupertuis par divers correspondants, au château d'Estouilly (sur les bords de la Somme, à proximité de la petite ville de Ham), propriété du beau-frère de La Condamine d'abord, puis successivement de ses neveu, petit-neveu et arrière petite-nièce, la comtesse de Vaudrimey. Grâce à ces circonstances, l'abbé A. Le Sueur, admis dans la bibliothèque du château d'Estouilly,

put, avant même de publier son ouvrage sur *La Condamine d'après ses papiers inédits* (Paris, 1911), donner, sous le titre de *Maupertuis et ses correspondants* (Montreuil-sur-Mer, 1896), une édition d'une partie de la correspondance en question. Pourtant, il n'eut pas connaissance de l'ensemble.

Après de multiples péripéties, notamment du fait de la guerre 1914-1918, au cours de laquelle le château d'Estouilly fut détruit, d'importants vestiges de ce précieux dépôt scientifique, spécialement un lot de 108 lettres d'Euler, se retrouvèrent entre les mains des descendants de la famille de Vaudrimey. C'est à l'amabilité de l'un d'eux, M. le comte Emeric de Gaillard, ainsi qu'à l'obligeance du professeur Otto Spiess, de l'Université de Bâle, qui, après avoir, sur les indications de M. le chanoine Le Sueur, entrepris avec nous les recherches (en un champ d'ailleurs beaucoup plus vaste, voir notre note sur *La correspondance des Bernoulli* dans *Archeion*, organe officiel de l'Académie internationale d'histoire des sciences, avril-septembre 1936), a bien voulu se charger de faire, en vue d'une édition ultérieure (dans les œuvres complètes d'Euler), la copie *in extenso* de cette importante correspondance, c'est à tous ces précieux concours, dis-je, que nous devons de pouvoir aujourd'hui publier ces extraits.

Nous avions pensé d'abord les utiliser au cours de notre exposé de la pensée d'Euler concernant la moindre action ; mais, à la réflexion, nous avons jugé préférable de leur maintenir quelque unité dans la présentation, en laissant aux lecteurs le soin de confronter tel ou tel passage avec les points correspondants de l'argumentation générale. Ajoutons que, pour en faciliter la lecture, nous n'avons pas conservé l'orthographe originale, qui n'importait d'ailleurs aucunement à notre dessein.

En ce qui concerne le sens et la portée de ces remarques d'Euler, si elles laissent assurément supposer combien Maupertuis se montrait jaloux de son originalité, elles ne permettent cependant pas d'affirmer qu'elles ne manifestent chez leur auteur que simple complaisance. Nous devons répéter, à ce sujet, que rien n'autorise à douter vraiment de la sincérité d'Euler, tant dans ses rapports personnels avec Maupertuis, que dans son attitude officielle au cours des discussions à l'Académie de Berlin.

LE PRINCIPE DE LA MOINDRE ACTION CHEZ LAGRANGE

La préoccupation, qui se rencontre même chez Euler, bien qu'à un moindre degré que chez Maupertuis, de faire du principe de la moindre action, le principe unique dans les explications et les calculs de la mécanique, tant dynamique que statique, ne se retrouve plus dans la *Mécanique analytique ;* et c'est là une première constatation qui a son importance. En effet, Lagrange n'eût-il pas manifesté son intention de laisser de côté les considérations métaphysiques, que ce changement d'attitude en présence du problème indiquerait déjà assez clairement l'indépendance de sa pensée par rapport aux conceptions téléologiques.

En abordant l'examen des *maxima* et *minima* qui peuvent avoir lieu dans l'équilibre, Lagrange, reprenant pour cela une formule générale précédemment adoptée par lui, posait :

$$P dp + Q dq + R dr + \text{etc.} = o$$

pour l'équilibre d'un système quelconque de forces P, Q, R, etc. dirigées suivant les lignes : *p, q, r,* etc.

Dès lors « on peut supposer que ces forces soient exprimées de manière que la quantité $P dp + Q dq + R dr$, etc., soit une différentielle exacte d'une fonction de *p, q, r,* etc., laquelle soit représentée par Φ, en sorte que l'on ait :

$$d\Phi = P dp + Q dq + R dr + \text{etc.}$$

Alors on aura pour l'équilibre cette équation $d\Phi = o$, laquelle fait voir que le système doit être disposé de manière que la fonction Φy soit généralement parlant un *maximum* ou un *minimum*.

Je dis *généralement parlant* ; car on sait que l'égalité d'une différentielle à zéro n'indique pas toujours un *maxi-*

mum ou un *minimum,* comme on le voit par la théorie des courbes.

La supposition précédente a lieu en général lorsque les forces P, Q, R, etc. tendent réellement ou à des points fixes ou à des corps du même système, et sont proportionnelles à des fonctions quelconques des distances ; ce qui est proprement le cas de la nature.

Ainsi, dans cette hypothèse de forces, le système sera en équilibre lorsque la fonction Φ sera un *maximum* ou un *minimum* ; c'est en quoi consiste le principe que M. de Maupertuis avait proposé sous le nom de *loi de repos.* » (115).

Nous avons dit (note 21) qu'Euler, en recherchant dans quels cas on obtient un *maximum,* et dans quels cas, un *minimum,* avait trouvé que ce dernier répond à ceux d'équilibre stable. De même, nous voyons Lagrange s'appliquer à « démontrer que, si cette fonction est un *minimum,* l'équilibre aura de la stabilité, en sorte que, le système étant d'abord supposé dans l'état d'équilibre et venant ensuite à être tant soit peu déplacé de cet état, il tendra de lui-même à s'y remettre, en faisant des oscillations infiniment petites ; qu'au contraire, dans le cas où la même fonction sera un *maximum,* l'équilibre n'aura pas de stabilité, et qu'étant une fois troublé, le système pourra faire des oscillations qui ne seront pas très petites et qui pouront l'écarter de plus en plus de son premier état ». (116).

Mais, tout en retrouvant ainsi par le calcul le *minimum* auquel Maupertuis donnait une telle importance, tant du point de vue métaphysique que du point de vue mathématique, Lagrange tenait à considérer pour elle-même et indépendamment de ses rapports au principe de la moindre action cette *loi de repos.* Aussi lui maintenait-il cette dénomination, que Maupertuis lui avait primitivement donnée, avant de l'avoir subordonnée, puis assimilée, comme nous l'avons vu, au principe de la moindre action. S'il brisait ainsi, d'une certaine manière, l'unité de ce principe, Lagrange la rétablissait d'autre part, il est vrai, en un autre sens. Car cette loi de repos, de la sorte non intégrée au principe de la moindre action, ne restait pas en dehors et en face de lui, à titre de principe distinct original. Lagrange ne la consi-

dérait en effet, que comme une autre forme ou expression du principe des vitesses virtuelles (117). Bref, en abandonnant l'aspect statique du principe de la moindre action, Lagrange faisait seulement perdre à ce principe, désormais explicitement limité à la dynamique, sa généralité ; conséquence capitale certes pour qui voulait y voir autre chose qu'une formule mathématique ; sans grande importance par contre pour le pur mathématicien.

Peut-être convient-il d'ailleurs de pousser plus loin et d'approfondir le sens de cette transformation pour en comprendre l'exacte signification. Il n'est pas sans intérêt, en effet, de nous demander jusqu'à quel point le principe de la moindre action perdait de sa généralité en se trouvant ainsi, sous sa forme explicite, confiné dans la dynamique. Or, il ne faut pas négliger, dans l'examen de cette question, le fait que le principe des vitesses virtuelles, auquel était ramenée la loi de repos, distraite, en quelque sorte, du principe de la moindre action, tendait, par l'étendue de son application, à unir intimement la statique et la dynamique. Par là, le principe de la moindre action pouvait perdre moins de sa généralité qu'il ne semblait à première vue (118).

Quoi qu'il en soit, la dynamique paraissait à Lagrange se prêter assez bien à l'introduction du principe de la moindre action, à condition toutefois de ne pas s'en tenir à l'énoncé de Maupertuis, ni même aux applications faites par celui-ci. Car « il faut avouer que ces applications sont trop particulières pour servir à établir la vérité d'un principe général ; elles ont d'ailleurs quelque chose de vague et d'arbitraire, qui ne peut que rendre incertaines les conséquences qu'on en pourrait tirer pour l'exactitude même du principe ». Aussi avait-il quelque satisfaction à trouver la manière de l'envisager proposée par Euler à la fois « plus générale et plus rigoureuse ».

Après avoir rappelé la propriété des trajectoires décrites par des forces centrales étudiée par celui-ci dans son *De motu projectorum*, il continuait (119) : « Cette propriété que M. Euler n'avait reconnue que dans le mouvement des corps isolés, je l'ai étendue depuis au mouvement des corps qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque ; et il en est résulté ce nouveau principe général, que la

somme des produits des masses par les intégrales des vitesses multipliées par les éléments des espaces parcourus est constamment un maximum ou un minimum. »

Cette extension du principe vaut qu'on s'y arrête, car elle marque de façon nette le progrès réalisé par Lagrange par rapport aux résultats obtenus par Euler. Il est vrai que celui-ci avait déjà cherché à passer des corps isolés aux systèmes, et qu'il avait affirmé, nous l'avons vu, que « dans le mouvement de plusieurs corps pris ensemble, de quelque manière que ceux-ci agissent les uns sur les autres la somme de tous les mouvements est toujours minima », mais en ajoutant, rappelons-le, que « étant donné que des mouvements de cette sorte se plient difficilement au calcul, cela est compris plus facilement en partant des premiers principes... ». Aveu à peine déguisé d'impuissance chez un mathématicien, même lorsque, comme Euler, il ne répugne pas à faire intervenir des considérations philosophiques. Bref, si l'on peut dire qu'Euler a entrevu le sens d'une extension possible du principe aux systèmes, on doit ajouter qu'il n'en a nulle part indiqué, même de façon plus ou moins implicite, les moyens de réalisation. Ce qui n'avait été chez lui qu'une sorte d'intuition schématique se vérifie chez Lagrange, en se pliant à des démonstrations rigoureuses, grâce à un instrument mathématique nouveau, le calcul des variations.

« Tel est, ajoutait encore Lagrange à son nouvel énoncé, le principe auquel je donne ici, quoique improprement, le nom de *moindre action,* et que je regarde non comme un principe métaphysique, mais comme un résultat simple et général des lois de la mécanique. » D'ailleurs l'auteur de la *Mécanique analytique* ne se contentait pas d'établir par le calcul que « dans le mouvement d'un système quelconque de corps animés par des forces mutuelles d'attraction ou tendantes à des centres fixes et proportionnelles à des fonctions quelconques des distances, les courbes décrites par les différents corps et leurs vitesses sont nécessairement telles que la somme des produits de chaque masse par l'intégrale de la vitesse multipliée par l'élément de la courbe est un *maximum* ou un *minimum,* pourvu que l'on regarde les premiers et les derniers points de chaque courbe comme donnés, en sorte que

les variations des coordonnées répondantes à ces points soient nulles. » Cherchant ensuite à déterminer l'usage possible de ce « théorème général », il remarquait : « Mais ce théorème ne contient pas seulement une propriété très remarquable du mouvement des corps, il peut servir à déterminer ce mouvement. En effet, puisque la formule $Sm\int v ds$ doit être un *maximum* ou un *minimum,* il n'y a qu'à chercher, par la méthode des *variations,* les conditions qui peuvent la rendre telle ; et en employant l'équation générale de la conservation des forces vives, on trouvera toujours toutes les équations nécessaires pour connaître le mouvement de chaque corps ; car, pour le *maximum* ou *minimum,* il faut que la variation soit nulle et que par conséquent on ait $\delta . Sm\int v ds = o$; et de là, en pratiquant dans un ordre rétrograde les opérations exposées ci-dessus, on retrouvera la même formule générale d'où l'on était parti. » (120).

Ainsi donc le principe de la moindre action, tout en achevant de se dépouiller de son sens finaliste, conserve néanmoins chez Lagrange sa valeur méthodologique générale et son rôle heuristique. S'il n'a plus dans la *Mécanique analytique,* la place primordiale, qui revient au principe des vitesses virtuelles et à celui de d'Alembert, par contre il acquiert une précision et une fécondité mathématiques nouvelles. C'est sous la forme que lui a donnée Lagrange que le recueilleront Hamilton (121) et Jacobi (122).

Mais dès lors une question se pose, qui, du point de vue historique, exige une réponse précise : n'y a-t-il pas lieu de considérer le travail accompli par Lagrange sur cette notion de moindre action, beaucoup moins comme l'élaboration progressive d'une idée remontant à Maupertuis, que comme la brusque apparition d'une conception neuve ? En d'autres termes, le problème n'a-t-il pas été tellement renouvelé, transposé, repris, en quelque sorte, par la base, qu'on devrait, pour apprécier exactement la position historique de Lagrange, faire abstraction des antécédents, plutôt que d'essayer d'y rattacher sa pensée par des liens trop artificiels pour être solides ? A qui serait tenté d'opérer ainsi la scission entre les tâtonnements métaphysico-mathématiques de Maupertuis et les résultats précis des calculs de Lagrange, il

faudrait rappeler le chaînon intermédiaire qui, ainsi que nous nous sommes efforcé de le montrer, existe dans l'œuvre d'Euler. D'ailleurs, si l'on ne saurait négliger, sans travestir la réalité du développement historique, cet élément important de continuité, il convient d'autre part de tenir le plus grand compte de ce que nous apprend Lagrange lui-même sur l'évolution de sa propre pensée. S'il est nécessairement très sobre de renseignements sur ce point dans sa *Mécanique analytique,* il y précise pourtant qu'il a appelé de ce nom son principe de la moindre action « par analogie avec celui que Maupertuis avait donné sous cette dénomination et que les écrits de plusieurs auteurs illustres ont rendu ensuite si fameux ».

Si l'on était tenté de tenir pour insuffisante cette indication et de voir, dans ces rapprochements entre les idées de Lagrange et celles de Maupertuis, quelque chose de factice, une construction artificielle basée sur une interprétation gratuite de certains textes, il suffirait de considérer de plus près la formation de la pensée de Lagrange pour se convaincre du rôle qu'y ont joué des préoccupations nées de la lecture de Maupertuis. La correspondance avec Euler (123) et les *Mémoires* de l'Académie de Turin sont particulièrement significatifs sur ce point.

Dans une lettre à Euler du 19 mai 1756, Lagrange, après l'avoir chargé de ses remerciements pour Maupertuis, ajoute : « Je me réjouis beaucoup de ce que mes modestes réflexions sur les maxima et minima et sur l'application du principe de la moindre action à toute la dynamique n'ont déplu ni à vous ni au très illustre Président [de l'Académie de Berlin] » (124). Et le 4 août 1758, il écrivait encore au même correspondant : « Je vous prie d'envoyer la lettre ci-incluse, à M. de Maupertuis, dont j'ignore l'adresse. J'y parle surtout du livre, que je viens presque d'achever, sur l'application du principe de la moindre quantité d'action à toute la mécanique. En tête de cet ouvrage figure une exposition de la méthode des maxima et minima dont je vous ai fait part il y a trois ans et qu'avec le plus grand soin j'ai rendue générale. » (125).

« L'ouvrage auquel je travaillais sur l'application du prin-

cipe de la moindre quantité d'action à l'ensemble de la mécanique est presque terminé, lisons-nous dans une lettre du 20 juillet 1759 à Euler ; je l'ai divisé en deux parties ; dans la première est exposée ma méthode des maxima et minima appliquée aux formules intégrales indéfinies, à laquelle je me suis efforcé de donner la plus grande extension que j'ai pu, de telle sorte qu'il paraisse pouvoir rester peu à désirer en cette matière. La seconde partie traite du principe de la moindre quantité d'action, au moyen duquel et par la méthode précédemment exposée tous les problèmes plus difficiles [par une autre méthode] de la mécanique sont résolus très facilement et d'une manière générale. J'aurais l'intention, s'il était possible de le faire, de vous envoyer auparavant cet ouvrage à Berlin pour qu'il soit soumis complètement tant à votre jugement qu'à celui de M. de Maupertuis et à celui de l'Académie, et qu'il puisse ensuite être mis à l'impression là aussi, afin d'éviter toutes les difficultés qui se rencontrent en nos régions dans l'édition des livres (126). »

Ce sont précisément les deux parties ici nettement distinguées de cet ouvrage auquel Lagrange attachait tant d'importance (127) que nous trouvons dans les deux mémoires publiés dans les *Miscellanea Taurinensia* de 1760-1761 (128). Le premier est intitulé : *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies* ; et le second : *Application de la méthode exposée dans le mémoire précédent à la solution de différents problèmes de dynamique.* Effectivement dès le début de ce mémoire se trouve énoncé ce « Principe général : soient tant de corps qu'on voudra, M, M', M''... qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque, et qui soient de plus, si l'on veut, animés par des forces centrales proportionnelles à des fonctions quelconques des distances ; que s, s', s''... dénotent les espaces parcourus par ces corps dans le temps t et que u, u', u''... soient leurs vitesses à la fin de ce temps ; la formule

$$M\int u ds + M'\int u'd's' + M''\int u''d''s'' + \ldots$$

sera toujours un maximum ou un minimum. » (129).

Aussi, après lecture de ce mémoire, Euler écrivait-il à Lagrange, le 9 novembre 1762 : « Quelle satisfaction n'aurait

pas M. de Maupertuis, s'il était encore en vie, de voir son principe de la moindre action porté au plus haut degré de dignité dont il est susceptible. » (130). Ce témoignage d'un contemporain particulièrement compétent est suffisamment explicite (surtout lorsqu'il corrobore, comme on peut s'en rendre compte, les textes précédemment cités de Lagrange lui-même), pour qu'il ne paraisse pas nécessaire d'en discuter la signification.

LE PRINCIPE DE LA MOINDRE ACTION CHEZ CARNOT

Pas plus chez Lagrange que chez Euler, il n'est fait application du principe de la moindre action au choc des corps, tandis que cette question spécialement était envisagée chez Maupertuis. Mais celui-ci, de l'avis de Carnot, n'avait pas su mettre en lumière, ni même reconnu la différence existant entre ce cas et celui des mouvements dans lesquels n'apparaissent pas de changements brusques. « Il y en a cependant une très grande, et pour appliquer le principe de la moindre action à chacun d'eux, en donnant à son énoncé la clarté nécessaire et la précision mathématique, il faut en faire deux propositions qui n'ont rien de commun, ou plutôt il en résulte qu'il y a deux principes exacts, mais très différents l'un de l'autre, auxquels le principe vague de Maupertuis a donné lieu ; l'un applicable exclusivement au cas où le mouvement change par degrés insensibles, l'autre exclusivement à celui du choc des corps ou des changements brusques. » (131).

Après avoir ainsi établi de façon nette la distinction et montré que les deux cas devaient être étudiés séparément, Carnot s'attacha à considérer l'application du principe aux chocs des corps. Ses recherches l'amenèrent à découvrir que, si l'on fait disparaître le vague laissé par Maupertuis sur ce point, « il en résulte un très beau principe, qui, seul et indépendamment de tout autre, suffit pour trouver, dans tous les cas possibles, l'état de repos ou de mouvement d'un système quelconque de corps, agissant les uns sur les autres par chocs ou changements brusques, soit immédiatement, soit par l'entremise des machines. » (132).

Sans appel aux causes finales et seulement par des démonstrations rigoureuses, Carnot établit donc, dès la première édition de son *Essai sur les machines en général*, le théorème suivant : « Parmi tous les mouvements dont est susceptible un système de corps parfaitement durs agissant les uns sur les autres par un choc immédiat, ou par des machines quelconques sans ressort, de manière qu'il en résulte un changement brusque dans l'état du système : celui de tous ces mouvements qui aura lieu réellement après l'action, est le mouvement géométrique qui est tel, que la somme des produits de chacune des masses par le carré de la vitesse qu'elle perdra est un minimum. C'est-à-dire moindre que la somme des produits de chacune des masses par le carré de la vitesse qu'elle aurait perdue, si le système eût pris un autre mouvement quelconque géométrique. » (133).

Puis Carnot réussit à dépasser ce premier résultat, qui lui paraissait encore trop restreint, puisqu'il ne concernait que les corps durs. « Cette loi s'étend, lisons-nous dans les *Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement* (134), avec les modifications convenables, aux chocs qui peuvent avoir lieu dans un système de corps parfaitement élastiques, ou même doués d'une élasticité quelconque constante ; c'est-à-dire qui soit la même pour tous les corps du système ». Et après avoir, à la suite de ses calculs sur ce point, rappelé la position antérieure de Maupertuis, Carnot d'ajouter : « La démonstration que je viens de donner ici est plus générale, puisqu'elle embrasse les corps doués de divers degrés d'élasticité ; mais elle prouve en même temps combien sont caduques celles qu'on voudrait baser sur les causes finales, puisqu'elle fait voir que le principe n'est point général, mais restreint au cas où tous les corps du système sont doués du même degré d'élasticité. Au reste, le théorème tel que je l'ai donné, me paraît plus simple et plus facile à employer que celui de la moindre action, où l'on introduit inutilement l'espace parcouru. Mais il n'en est pas moins vrai que, d'après l'explication qui vient d'être donnée, il ne reste plus rien de vague dans le principe de Maupertuis, et qu'il est rigoureusement et mathématiquement démontré. » (135).

Nous voyons par là en même temps sur quels points Carnot

se sépare de Maupertuis, et comment sa pensée procède cependant du principe de la moindre action.

LE PRINCIPE DE LA MOINDRE ACTION CHEZ POISSON

Il n'entre pas dans notre plan de poursuivre au delà du XVIIIe siècle cette étude historique sur le principe de la moindre action (136). Nous jugeons opportun cependant, avant de conclure, d'envisager rapidement la place faite à ce principe par Poisson dans son *Traité de mécanique*. En effet, comme nous allons le montrer, cet auteur, par un détour assez inattendu vers l'optique, ramena, à la suite de Laplace, le principe de la moindre action vers une application d'où il était sorti tout d'abord chez Maupertuis. Si le fait n'a pas une grande valeur intrinsèque, il prend historiquement une certaine importance, parce qu'il met en lumière la façon dont la pensée scientifique dans son évolution procède parfois par tâtonnements successifs dans la même direction et par retours sur des voies déjà explorées mais progressivement délaissées ou soudainement abandonnées.

Après avoir étudié le mouvement d'un point matériel sur une surface donnée, et établi que lorsque celui-ci n'est sollicité par aucune force accélératrice, il suit toujours la ligne la plus courte sur cette surface pour aller d'un point à un autre, Poisson continue : « Cette propriété de la trajectoire d'un mobile qui n'est soumis à l'action d'aucune force accélératrice n'est qu'un cas particulier d'une autre propriété plus générale, que l'on a d'abord envisagée sous un point de vue métaphysique, et à laquelle on a donné la dénomination impropre de *principe de la moindre action*. Pour s'en former une idée précise, que l'on se représente un corps partant d'un point donné A, et arrivant à un autre point B aussi donné ; que sa vitesse au point A soit donnée en grandeur et inconnue en direction, et que les forces accélératrices qui le sollicitent pendant son mouvement soient telles que la formule

$$\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz$$

soit une différentielle exacte à trois variables (137) ; on pourra alors déterminer la vitesse v du mobile en fonction des coordonnées x, y, z, sans connaître la courbe que le

mobile suit pour aller du point A au point B ; supposons que l'on multiplie cette vitesse par l'élément *ds* de la courbe, et que l'on prenne l'intégrale $\int v ds$ depuis le point A jusqu'au point B ; il est évident que la valeur de cette intégrale définie dépendra de la nature de cette courbe ; or, le principe de la moindre action consiste en ce que le mobile, s'il se meut librement, choisira entre toutes les courbes que l'on pourrait mener par les points A et B, la courbe pour laquelle l'intégrale $\int v ds$ est un *minimum;* et s'il est astreint à se mouvoir sur une surface donnée, il choisira encore la courbe qui répond au minimum de cette intégrale, entre toutes les courbes tracées sur la surface et menées par les points A et B. La démonstration de ce principe se réduit à prouver que la variation de l'intégrale $\int v ds$ est nulle, les deux points extrêmes de la courbe étant supposés fixes (138). »

A la démonstration, établie par application du calcul des variations, que la variation de $\int v ds$ est effectivement égale à zéro, Poisson ajoute : « Par conséquent cette intégrale est un *maximum* ou un *minimum ;* mais il est aisé de voir que la quantité $\int v ds$ par sa nature, ne saurait être susceptible d'un *maximum ;* donc cette intégrale est un *minimum*, relativement à la trajectoire du mobile, déterminée par les équations du mouvement. Lorsque le mobile n'est soumis à aucune force accélératrice, nous savons que sa vitesse est constante ; l'intégrale définie $\int v ds$ devient donc le produit *vs*, et alors c'est l'arc *s* décrit par le mobile, du point A au point B, qui est un *minimum*. Il suit aussi de l'uniformité du mouvement, qu'alors le mobile parvient d'un point à l'autre dans un temps plus court que s'il était forcé de suivre toute autre courbe que sa trajectoire (139). »

D'ailleurs « le principe de la moindre action qui s'observe dans le mouvement d'un point matériel, a également lieu dans le mouvement d'un système de corps. Ce théorème général s'énonce de cette manière : dans le mouvement d'un système de corps pour lequel le principe des forces vives à lieu, si l'on fait le produit de la vitesse de chaque mobile par sa masse et par l'élément de sa trajectoire, que l'on prenne la somme de tous ces produits pour tous les mobiles, et que l'on intègre ensuite cette somme, depuis une position donnée

du système jusqu'à une position aussi donnée, la valeur de cette intégrale sera un *minimum*. Ainsi, m étant la masse d'un des points matériels qui composent le système, v, sa vitesse, ds l'élément de sa direction, il s'agit de prouver que l'intégrale de $\Sigma mvds$, prise entre des limites données, est un *minimum*, ou que sa variation est nulle (140). » A la suite de la démonstration figurent encore les remarques suivantes : « L'intégrale $\int . \Sigma mvds$ est la même chose que $\Sigma . \int mv^2dt$; mais $\int mv^2dt$ est la somme des forces vives du point m, pendant toute la durée du mouvement ; $\Sigma . \int mv^2dt$ est de même la somme des forces vives de tous les points du système, pendant le même temps : le principe de la moindre action revient donc à dire que la somme des forces vives du système, pendant le temps qu'il emploie à passer d'une position donnée à une autre position aussi donnée, est un *minimum*. Quand les mobiles ne sont sollicités par aucune force accélératrice, la somme des forces vives, à chaque instant, est constante ; la somme des forces vives, pendant un temps quelconque, est donc proportionnelle à ce temps ; d'où il suit qu'alors le système parvient, d'une position à une autre dans le temps le plus court (141). »

On voit comment sur tous les points essentiels Poisson suit de fort près Lagrange ; mais d'autre part, comme nous l'avons déjà indiqué, il transporte de nouveau à la suite de Laplace (142) le principe de la moindre action dans le domaine où celui-ci avait pris naissance, à savoir l'optique ; ainsi il se retrouve, avec les considérations métaphysiques en moins, bien près de Maupertuis. La question vaut la peine d'être considérée avec quelque attention.

« L'application la plus remarquable qu'on ait faite du principe de la moindre action, affirme-t-il (143), a été d'en déduire les lois connues de la réfraction et de la réflexion de la lumière. » En ce qui concerne d'abord la réfraction, « tant qu'un rayon lumineux se meut dans un milieu d'une égale densité, sa vitesse et sa direction restent les mêmes ; mais lorsqu'il passe d'un milieu dans un autre, sa direction s'infléchit et sa vitesse change. Dans l'instant de ce passage, la lumière décrit une courbe d'une étendue inappréciable, et dont on peut faire abstraction, sans erreur sensible. La tra-

jectoire de chaque molécule lumineuse est donc alors l'assemblage de deux droites, dont chacune est décrite d'un mouvement uniforme ; ainsi, en appelant y et y' les longueurs de ces droites, n, la vitesse de la lumière dans le premier milieu, n', la vitesse dans le second, on aura ny pour la valeur de l'intégrale $\int v ds$ prise depuis le point de départ de la molécule jusqu'à son entrée dans le second milieu, et $n'y'$, pour la partie de cette intégrale relative au second milieu ; par conséquent, la valeur de cette intégrale, prise dans toute l'étendue de la trajectoire, sera exprimée par $ny + n'y'$; c'est donc cette somme $ny + n'y'$, qui doit être un *minimum*, d'après le principe de la moindre action ». Or, en faisant le calcul (143), on obtient, en désignant par x et x' les angles d'incidence et de réfraction, l'équation $n \sin x = n' \sin x'$, servant à déterminer les valeurs de x et x' répondant aux conditions du problème. C'est-à-dire que l'on retrouve, de ce biais, la loi connue des sinus (143 bis).

Quant à la réflexion, la vitesse du rayon lumineux « sera constante dans toute l'étendue de la trajectoire, qui est alors comprise en entier dans un même milieu ; l'intégrale $\int v ds$ sera donc égale à la longueur de cette trajectoire, multipliée par la vitesse constante ; par conséquent cette longueur sera un *minimum* en vertu du principe de la moindre action ». Et le calcul sur de telles données amène encore à retrouver la loi établissant l'égalité de l'angle de réflexion à l'angle d'incidence.

De toute évidence, il ne s'agit pas d'instituer ici une discussion critique, qui nous entraînerait, comme il est facile de s'en rendre compte, jusqu'à un examen historique des théories de la lumière. Il suffit amplement à notre dessein que se trouvent ainsi indiquées quelques répercussions intéressantes d'une idée qui, à travers des vicissitudes diverses, continuait à se montrer féconde, en imprimant une certaine direction à des recherches variées et en unifiant, en quelque sorte, sous un point de vue général des résultats acquis dans un champ scientifique assez vaste. Peut-être est-ce la preuve, ou du moins l'indice, que, même en dehors des préoccupations métaphysiques, dont elle s'est progressivement libérée, comme nous l'avons vu au cours de cette étude sur son évo-

lution historique, elle répondait à quelque besoin de l'esprit dans l'élaboration des connaissances successivement accumulées. Cette remarque nous amène à poser le problème logique de la signification du principe de la moindre action ; question bien délicate, sur laquelle nous présenterons tout au plus de très brèves remarques.

CONCLUSION

Ainsi donc, pour que le principe de la moindre action acquît, dans l'œuvre de Lagrange, la valeur et la solidité requises d'une conception vraiment scientifique, deux conditions essentielles ont dû se trouver réalisées : l'élimination de toute téléologie (puisque des considérations de cet ordre y avaient été dès le début associées chez Maupertuis) et l'expression dans une formule mathématique rigoureuse. Or, si Lagrange a été le grand artisan de cette double transformation apportée à ce principe au cours de son évolution, Euler apparaît, de façon claire, comme ayant, dans les deux démarches aussi nécessaires l'une que l'autre, accompli plus que les premiers pas. Certes son action a été plutôt timide quand il s'est agi de dépouiller le principe de la moindre action de sa structure métaphysique ; son rôle, même à ce point de vue, ne doit pourtant pas être méconnu. Quant à la mathématisation rigoureuse du principe, on peut dire qu'il l'a préparée et ébauchée avec une telle netteté, qu'il a vraiment donné l'impulsion décisive. Il lui manquait évidemment l'instrument parfait que devait mettre au service de Lagrange la découverte par celui-ci du calcul des variations ; mais dans cette direction aussi, sa tâche a été féconde et il a prolongé en ce sens des tâtonnements fructueux, qui, à travers les perfectionnements successifs de la méthode des *maxima* et *minima*, remontaient jusqu'à Leibniz, en passant par Bernoulli.

Mais, si grande que soit la place qui revient à Euler parmi les précurseurs, elle ne doit pas nous masquer, pour ainsi dire, la perspective et nous empêcher d'apprécier les exactes proportions de la contribution apportée par Maupertuis. L'intervention de celui-ci dans le problème n'a pas eu seule-

ment pour effet de fausser, au point de départ, la direction des investigations, comme on pourrait le croire si l'on se laissait aller trop facilement à condamner formellement sa tendance téléologique. En dépit de celle-ci, ou plus exactement par cela même, il a donné l'élan initial. Il fallait, pour soutenir les premiers efforts dans cette voie aride, une sorte d'enthousiasme, que les espoirs métaphysiques ne pouvaient que renforcer. Avant de devenir une gangue, l'armature finaliste a constitué une sorte d'étai pour l'idée naissante ; d'ailleurs plus elle obligeait à hausser le principe au-dessus du pur calcul, plus elle invitait aussi à chercher de larges horizons. Bref, elle a porté l'idée jusqu'à un point où l'on ne pouvait plus l'abandonner sans avoir tenté au moins d'en épuiser toute la richesse, d'en réaliser toutes les virtualités. N'est-ce pas, au fond, la raison pour laquelle tous les savants qui l'ont successivement reprise, tout en critiquant la dénomination du principe, la lui ont conservée, comme s'ils avaient hésité à en voiler l'origine ? Quoi qu'il en soit, l'œuvre de Maupertuis sur ce point, ne demandait pas seulement à être détruite, pour laisser s'épanouir les conceptions fécondes ; elle méritait d'être prolongée, rectifiée, précisée. Et c'est ce qu'ont fort bien compris les grands mathématiciens qui ont voulu retenir de la première intuition une vague, mais pourtant réelle orientation. D'ailleurs leur ardeur même à donner au principe de la moindre action la plus grande généralité possible ne laisse-t-elle pas supposer qu'ils n'ont jamais abandonné l'implicite désir d'y trouver au moins un moyen d'unification de leur conception du monde ? La connaissance la plus positive s'accommode fort bien de l'affirmation d'un ordre naturel.

Nous voilà de nouveau invités à passer du domaine de l'histoire des sciences à celui de l'épistémologie, et à nous demander quelle peut être la signification de ce principe de la moindre action. Nous ne le ferons qu'avec discrétion, en cherchant plutôt à réunir certaines données du problème qu'à lui apporter quelque solution.

Après avoir insisté sur ce qu'il y a de remarquable à ce qu'une expression aussi simple que $\int v ds$ possède la propriété qu'en égalant à zéro sa variation on obtienne les équa-

tions ordinaires du mouvement, Mach se demande si l'on n'en peut pas trouver « la signification physique ». De ce point de vue, il aboutit à la conclusion « que le principe de la moindre action et, avec lui, tous les autres principes de minimum que l'on rencontre en mécanique expriment simplement que, dans chaque cas, il arrive exactement tout ce qui peut arriver dans les circonstances du cas considéré, c'est-à-dire tout ce que ces circonstances déterminent, et déterminent d'une façon unique (144) ».

Ce ne sont pas seulement les cas d'équilibre qui peuvent être déduits de cette détermination unique, mais aussi les cas dynamiques, et Mach se réfère sur ce point à un texte de J. Petzoldt, qu'il cite textuellement. « Dans tout mouvement, dit cet auteur (145), la trajectoire réellement parcourue apparaît toujours comme se distinguant nettement de l'infinité des trajectoires imaginables. Mais analytiquement cela ne signifie rien d'autre que ceci : il est toujours possible de trouver des expressions dont la variation, égalée à zéro, fournit les équations différentielles du mouvement, car la variation ne peut s'évanouir que lorsque l'intégrale prend une valeur déterminée d'une seule façon. Les théorèmes d'Euler et de Hamilton, non moins que celui de Gauss, ne sont par conséquent autre chose que des expressions analytiques du fait expérimental que les phénomènes de la nature sont déterminés d'une façon unique. » La remarque est évidemment de grande valeur. Aussi Mach, reprenant ailleurs cette considération, pour en déterminer précisément la signification, affirme-t-il « que pour les lois dynamiques (comme le principe de la moindre action, etc.), qui sont exprimées sous la forme d'un théorème de maximum ou minimum, ce n'est pas le maximum ou le minimum qui est important, mais plutôt la notion de la détermination univoque » (146).

Ainsi le principe de la moindre action se subordonne, en quelque sorte, à un autre principe ; car cette notion de détermination unique semble bien être, plus qu'un « fait expérimental », suivant l'expression de Petzoldt, un véritable principe, comme n'hésite pas à le nommer en d'autres textes Mach. Peut-être même vaudrait-il mieux dire un postulat, pour mieux marquer quelle part d'arbitraire enferme cette

notion. C'est en effet le savant qui, pour rendre la nature intelligible, s'efforce de la plier aux cadres de sa pensée, et c'est parce qu'il serait désorienté dans un monde non ainsi déterminé, qu'il cherche à trouver dans les phénomènes naturels cette détermination unique.

Quoi qu'il en soit, et sans nous aventurer plus loin, à ce propos, dans un domaine où nous risquerions de faire intervenir trop d'hypothèses, constatons que le principe de la moindre action, grâce à la formule dans laquelle il s'exprime, permet de traduire en un moyen d'investigation fécond, parce que mathématiquement constitué, une exigence fondamentale de la pensée rationnelle s'efforçant de comprendre le monde. Autant au moins, sinon plus, qu'il est une interprétation, une traduction de l'expérience dans un langage analytique, ce principe en est une anticipation, une prévision, mieux une préparation, parce qu'il dirige la recherche en allant au devant des faits. Tout en se subordonnant au principe de la détermination unique, il le précise, sans le restreindre, en lui apportant le concours précieux de l'appareil mathématique. Est-ce à dire qu'il soit indispensable ? Il serait vraisemblablement d'autant plus téméraire de l'affirmer, que ce serait méconnaître du même coup le caractère scientifique des périodes où il se trouve, pour ainsi dire, éclipsé. Tout ce que l'on peut remarquer, d'une manière générale, c'est que, sous des formes diverses, il est vrai, il tend à se réintroduire quand il a été éliminé.

NOTES

(115) *Mécanique analytique,* Paris, 1788, 1re partie, 3e section, § 13, p. 36-37. Dans le § 14, Lagrange fait une application de ces formules à un système de corps pesants ; et dans le § 15, en s'appuyant sur le principe de la conservation des forces vives, il retrouvait le principe proposé par G. de Courtivron.

(116) *Op. cit.,* p. 38.

(117) Après avoir énoncé, au début de la statique, le principe des vitesses virtuelles, Lagrange continuait : « Ce même principe a donné lieu ensuite à celui que feu M. de Maupertuis a proposé dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences,* de Paris, pour l'année 1740, sous le nom de *Loi de repos,* et que M. Euler a développé davantage et rendu plus général dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*

pour l'année 1751. Enfin, c'est encore le même principe qui sert de base à celui que M. le Marquis de Courtivron a donné dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de Paris pour 1748 et 1749. » (*Op. cit.*, p. 11).

(118) D'ailleurs Lagrange n'était pas tout à fait indifférent à la possibilité de maintenir à ce principe, à certaines conditions, sa généralité. « Au reste, fait-il lui-même remarquer (2e partie, section III, § 41), puisque $ds = udt$, la formule $\mathrm{S}m\int uds$, qui est un maximum ou un minimum, peut aussi se mettre sous la forme $\mathrm{S}m\int u^2dt$ ou $\int dt\mathrm{S}mu^2$, dans laquelle $\mathrm{S}mu^2$ exprime la force vive de tout le système dans un instant quelconque. Ainsi le principe dont il s'agit se réduit proprement à ce que la somme des forces vives instantanées de tous les corps, depuis le moment où ils partent des points donnés jusqu'à celui où ils arrivent à d'autres points donnés, soit un maximum ou un minimum. On pourrait l'appeler, avec plus de fondement, le principe de la plus grande ou plus petite force vive ; et cette manière de l'envisager aurait l'avantage d'être générale, tant pour le mouvement que pour l'équilibre, puisque nous avons vu, dans la 3e section de la 1re partie, que la force vive d'un système est toujours la plus grande ou la plus petite dans la situation d'équilibre. » (La fin de ce texte fait allusion au principe de G. de Courtivron.)

On retrouve là le prolongement de préoccupations que manifestait déjà Lagrange, au cours de ses premiers travaux, quand, ainsi que nous ne tarderons pas à le voir, il exprimait en 1759 à Euler son intention d'appliquer le principe de la moindre action à l'ensemble de la mécanique.

(119) *Op. cit.*, p. 188-189.

(120) En raison même de l'importance fondamentale que conserve la *Mécanique analytique*, nous croyons opportun d'y renvoyer pour toutes les démonstrations, nous réservant seulement d'indiquer ici, pour la commodité du lecteur, les formules indispensables ou celles auxquelles les textes cités font directement allusion. La formule générale à laquelle renvoie ici (*Op. cit.*, p. 211-212) Lagrange est

$$\mathrm{S}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z + \mathrm{P}\delta p + \mathrm{Q}\delta q + \mathrm{R}\delta r + \text{etc.}\right)m = o$$

En partant de $\delta.\mathrm{S}m\int vds = o$, on aboutit à

$$dt\,\mathrm{S}(\mathrm{P}\delta p + \mathrm{Q}\delta q + \mathrm{R}\delta r + \text{etc.})\,m + \mathrm{S}\left(\delta xd.\frac{dx}{dt} + \delta yd.\frac{dy}{dt} + \delta zd.\frac{dz}{dt}\right)m = o,$$

« équation qui est la même chose que la formule générale du mouvement » (*Op. cit.*, p. 214).

Notons que, dans la formule générale, $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ représentent les forces accélératrices dirigées suivant les lignes x, y, z ; on désigne par t le temps écoulé et l'on fait dt constant.

La formule donnée par Lagrange au principe de la moindre action

a soulevé bien des discussions et donné lieu à de nombreux travaux. Nous ne pouvons songer à en marquer ici les caractéristiques même dans leurs grandes lignes, car nous nous trouverions bien vite entraîné hors du cadre de cette étude strictement historique. Aussi nous contenterons-nous de réunir, pour la commodité du lecteur, quelques références bibliographiques, en même temps que certains éléments d'information particulièrement utiles pour une étude critique plus approfondie. Dans une note à son édition de la *Mécanique analytique*, J. Bertrand fait remarquer : « L'intégrale $Sm\int uds$ est un maximum ou un minimum, si on la compare aux intégrales analogues relatives à tout autre mouvement du système qui serait produit par les mêmes forces et dans lequel, malgré l'introduction de liaisons nouvelles laissant subsister le principe des forces vives, les positions initiales et finales resteraient les mêmes. Peut-être cet énoncé, qui résulte évidemment de la démonstration, n'est-il pas rendu assez explicite dans le texte. » De son côté, Th. Sloudsky, dans une importante *Note sur le principe de la moindre action* (Nouvelles annales de mathématiques, Paris, 1879), fait la mise au point suivante : « L'illustre auteur de la *Mécanique analytique*, qui, le premier, a formulé le principe de la moindre action dans toute sa généralité, admit malheureusement dans son exposition du principe une obscurité et même une certaine imprécision. Ayant démontré que $\delta.Sm\int uds = o$, il n'a pas indiqué quels sont les mouvements comparés. Ayant différentié, par rapport à la caractéristique δ, l'équation des forces vives et par conséquent assujetti tous les mouvements comparés à la condition $S\left(\frac{u^2}{2} + \Pi\right) m = H$, il n'a pas fait attention à ladite condition, ni en formulant le principe même, ni en déduisant de ce principe les équations du mouvement. Cette omission, peu grave en elle-même, mena cependant à des méprises. » (*Op. cit.*, p. 193). Cette remarque se trouve déjà dans un article d'Olinde Rodrigues publié dans la *Correspondance de l'Ecole Polytechnique,* tome III (1816), p. 159 et suiv. (reproduit dans le recueil *Abhandlungen über die Prinzipien der Mechanik von Lagrange, Jacobi und Gauss,* herausgegeben von Philip E. B. Jourdain, Leipzig, 1908).

Outre les études que nous aurons à signaler dans les notes suivantes, on pourra consulter l'article récent de L. S. Polak sur *Lagrange et le principe de la moindre action,* qui, paru en russe (Arch. ist. nauki i techn ; Leningrad, 1935, p. 155-181), comporte un résumé en français. Ernst Mach (*La mécanique. Exposé historique et critique de son développement,* Trad. fr. Emile Bertrand, Paris, 1904, p. 352) souligne « que Lagrange fit *expressément* remarquer que l'on ne peut faire usage du principe d'Euler que dans les cas où le théorème des forces vives subsiste ».

(121) Par suite des imprécisions qui subsistaient dans la formule de Lagrange et dont nous avons dit quelques mots dans la note précédente, les divergences d'interprétation sont apparues quand on a voulu déterminer les rapports existant entre le principe de Lagrange et celui d'Hamilton. C'est même ce point qui a été la source

des plus violentes polémiques, parmi celles auxquelles nous avons déjà fait allusion. En Russie, particulièrement, Ostrogradsky, dans un *Mémoire sur les équations différentielles relatives au problème des isopérimètres* (Mém. de l'Acad. de Saint-Pétersbourg, 6e série, Sc. math. et phys., t. IV) et dans une lettre à Braschmann, publiée dans le vol. I du Journal de la Société philomathique de Moscou, rectifiant l'énoncé de Lagrange, soutint que le principe de la moindre action, une fois correctement exprimé par l'équation $\delta \int (\Pi + T)\, dt = o$, se ramenait au principe d'Hamilton. Son opinion fut suivie dans son pays par un certain nombre de mathématiciens, et notamment par Braschmann (*Sur le principe de la moindre action,* Bull. de l'Acad. Imp. des Sc. de Saint-Pétersbourg, 1859) et Rachmaninoff. Mais d'autres savants combattirent ce point de vue, et parmi eux Sokoloff, Somoff et Sloudsky, qui, dans son mémoire déjà cité, annonce avec satisfaction que la controverse « a fini au profit de Lagrange. Il a été démontré que son analyse n'a point de fautes et que son théorème est essentiellement différent du principe d'Hamilton ». Aussi le même auteur s'élève-t-il avec force contre les conclusions de Mayer (*Geschichte des Princips der kleinsten Action,* Leipzig, 1877). « L'étude historique du sujet, écrit-il, aurait dû l'amener à une estimation exacte du principe et à l'appréciation juste du mérite de Lagrange. Mais M. Mayer ne s'est pas donné la peine de bien étudier la littérature de la question. En imitant Jacobi, il dit que le principe de la moindre action, tel qu'il est exposé par Lagrange, n'a aucun sens. Tâchant de l'expliquer, il arrive à la conclusion que c'est le principe d'Hamilton qui est exprimé par le théorème de Lagrange. » (*Op. cit.,* p. 200).

Voir encore, sur la question : Bobylev, *Ueber das Princip von Hamilton oder Ostrogradsky und über das Princip der kleinsten Wirkung* (Bull. de l'Acad. Imp. des Sc. de Saint-Petersbourg, 1889, suppl. n° 5) ; et aussi Otto Hölder, *Ueber die Principien von Hamilton und Maupertuis* (Nach. von der königl. Ges. der Wiss. zu Göttingen, Math. phys. Klasse, 1896) ; A. Voss, *Ueber die Principien von Hamilton und Maupertuis* (Nach. von der königl. Ges. der Wiss. zu Göttingen, Math. phys. Klasse, 1900) ; M. Réthy, *Ueber das Princip der kleinsten Action und das Hamilton'sche Princip* (Mathematische Annalen, Leipzig, 1897).

(122) Voir, sur ce point, Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik,* professées à Königsberg en 1842-1843 et éditées en 1866 par Clebsch. Consulter également Helmholtz, *Op. cit.* Là encore, les critiques adressées par Jacobi à Lagrange proviennent des imprécisions laissées par celui-ci dans sa formule. En ce qui concerne la formule d'Euler, « Jacobi, écrit Ernst Mach (trad. fr. de son ouvrage cité, p. 352) montra que l'on ne peut pas affirmer à proprement parler que, pour le mouvement réel, la somme $\int v ds$ est *minimum,* mais seulement que la variation de cette somme est nulle si l'on passe de la trajectoire réelle à une trajectoire infiniment voisine. Cette condition correspond bien *en général* à un maximum ou à un minimum, mais elle peut aussi être remplie *sans* maximum ni minimum. On doit donc apporter certaines restrictions à la propriété du minimum. Si par

exemple un corps, astreint à rester sur la surface d'une sphère, est mis en mouvement par une impulsion, il décrit un arc de grand cercle qui est, en général, une ligne de plus court chemin ; mais, lorsque l'angle de l'arc de cercle décrit dépasse 180°, on démontre sans peine qu'il y a une infinité de lignes sphériques voisines de longueurs moindres aboutissant aux mêmes extrémités. »

(123) Cette correspondance est en latin. Pour plus de commodité, nous donnons ici la traduction des passages que nous lui empruntons.

(124) *Œuvres complètes* de Lagrange publiées par J. A. Serret et G. Darboux, tome XIV (Paris, 1892), p. 155.

(125) *Op. cit.*, p. 158. Déjà dans une lettre du 4 juillet (1754?), Lagrange annonçait à Euler son intention de lui envoyer « quelques observations au sujet des maxima et minima qui se trouvent dans les actions de la nature » (*Op. cit.*, p. 138). Ce sont sans doute celles-là pour lesquelles il se félicitait, en 1756, d'avoir rencontré l'approbation d'Euler et de Maupertuis. D'autre part, dans une lettre du 20 novembre 1755, il avait indiqué à Euler comment il résolvait le problème de la brachystochrone par la méthode des variations.

(126) *Op. cit.*, p. 160-161.

(127) Lagrange s'exprime à ce sujet presque dans les mêmes termes en un mémoire des *Miscellanea Taurinensia,* vol. I, 1759, intitulé *Recherches sur la méthode de maximis et minimis :* « Cette méthode, étant générale pour quelque nombre de variables que ce soit, ne sera pas bornée aux seules fonctions algébriques, mais pourra encore s'étendre avec succès aux *maximum* et *minimum* qui sont d'un genre plus élevé et qui appartiennent à des formules intégrales indéfinies. Je me réserve de traiter ce sujet, que je crois d'ailleurs entièrement nouveau, dans un ouvrage particulier que je prépare sur cette matière et dans lequel, après avoir exposé la méthode générale et analytique pour résoudre tous les problèmes touchant ces sortes de *maximum* ou *minimum,* j'en déduirai, par le principe de la moindre quantité d'action, toute la mécanique des corps soit solides, soit fluides. » (*Œuvres,* éd. Serret et Darboux, tome I, 1867, p. 15).

(128) Le volume II de la collection parut en 1762.

(129) *Œuvres,* éd. Serret et Darboux, tome I, p. 365.

(130) *Œuvres,* tome XIV, p. 201.

(131) *Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement,* 1 vol. in-8, Paris, 1803, Préface p. VI-VII. La première édition de cet ouvrage avait paru, en 1783, sous le titre d'*Essai sur les machines en général.*

(132) *Op. cit.*, p. IX.

(133) Cet énoncé est emprunté à la 2ᵉ édition, p. 157. Ces mouvements géométriques, rendus nécessaires par la substitution aux vitesses virtuelles, qui sont infiniment petites, de vitesses finies appelées géométriques, « sont ceux que peuvent prendre les différentes parties d'un système de corps, sans se gêner les unes les autres, et qui, par conséquent, ne dépendent point de l'action et de la réaction des corps, mais seulement des conditions de leurs liaisons, peuvent être déterminés par la seule géométrie, et indépendamment des règles de la dynamique ». (Préface p. X et XI). Carnot donne

encore cette définition : « Tout mouvement qui, imprimé à un système de corps, ne change rien à l'intensité de l'action qu'ils exercent, ou pourraient exercer les uns sur les autres, si on leur imprimait d'autres mouvements quelconques, sera nommé mouvement géométrique. » (§ 136, p. 108).

(134) § 187, p. 161.

(135) *Op. cit.*, p. 164.

(136) Tout au plus avons-nous, à propos de Lagrange, indiqué par anticipation, dans quelques courtes notes, les répercussions ultérieures de sa pensée et les discussions soulevées autour de sa formule. Nous ajouterons encore ici quelques titres d'ouvrages utiles à consulter : Baehr (G. F. W.), *Sur le principe de la moindre action* (Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, La Haye, 1879 ; E. Brassine, *Nouvelle manière d'employer le principe de la moindre action dans les questions de dynamique* et *Sur un passage de la « Mécanique analytique » relatif au principe de la moindre action* (C. R. Acad. des Sc., 1882, p. 169 et 1.110) ; G. Darboux, *Sur le mouvement d'un corps pesant et le principe de la moindre action* (Bull. des Sc. math. et astron., 1912) ; E. Dühring, *Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik*, Berlin, 1873 ; Dienger (Joseph), *Das Prinzip der kleinsten Wirkung* (Archiv der Mathematik und Physik, 1864) ; Gauss (Karl Friedrich), *Ueber ein neues allgemeines Grundgesetz in der Mechanik* (J. für die reine und angewandte Mathematik, Berlin, 1829) ; C. S. Hilbert, *Ueber das Princip der kleinsten Wirkung* (Sitz. ber. der math. phys. Klasse der Königl. Bayerl. Akad. der Wiss zu München, 1904) ; Jourdain (Philip E. B.), *The principle of least action*, Chicago, 1912 ; H. Klein, *Die Prinzipien der Mechanik historisch und kristisch dargestellt*, Leipzig, 1872 ; Liouville (Joseph), *Expression remarquable de la quantité qui, dans le mouvement d'un système de points matériels à liaisons quelconques, est un minimum, en vertu du principe de la moindre action* (C. R. Acad. des Sc., 1856) ; Sabinine (G. Egor Th.), *Sur le principe de la moindre action* (Annali di matematica pura ed applicata, Roma, 1884) ; J. A. Serret, *Mémoire sur le principe de la moindre action* (C. R. Acad. des Sc., 1871 et Bull. des Sc. math. et astron. de la même année) avec deux additions (C. R. Acad. des Sc., 1871 et 1879) ; K. Uckermann, *Ueber das Princip der kleinsten Wirkung*, Marburg, 1893.

(137) Poisson fait remarquer un peu plus loin (p. 464) que « la formule $Xdx + Ydy + Zdz$ est une différentielle exacte, toutes les fois que les forces appliquées au mobile sont dirigées vers des centres fixes, et que leurs intensités sont fonction des distances à ces centres ; le principe de la moindre action a donc lieu, relativement à cette espèce de forces ».

(138) *Traité de mécanique*, Paris, 1811, tome I, p. 460-461.

(139) *Op. cit.*, p. 463.

(140) *Traité de mécanique*, tome II, p. 304.

(141) *Op. cit.*, p. 306.

(142) Notons toutefois que les calculs de Laplace portent seulement, comme nous le verrons, sur la *double réfraction* dans le spath d'Islande.

(143) *Traité de mécanique,* I, p. 466.

(143 *bis*) Pour la *double réfraction* présentée par le spath d'Islande, Poisson renvoie au mémoire dans lequel Laplace venait de déduire, en 1809 (voir *Mémoires de l'Institut* pour cette année-là), du principe de la moindre action, la loi de la double réfraction.

(144) *La mécanique..,* p. 358.

(145) *Maxima, minima und Oekonomie,* Altenburg, 1891, p. 11.

(146) *La connaissance et l'erreur,* trad. fr. par Marcel Dufour, Paris, 1908, p. 380.

INDEX DES RÉFÉRENCES

En dressant ici cette liste, nous ne prétendons nullement présenter une bibliographie exhaustive, surtout en ce qui concerne les études et commentaires récents. Il est peu d'ouvrages de mécanique qui ne contiennent au moins quelques remarques sur la question; nous nous contentons d'y renvoyer le lecteur sans indication expresse, même pour ceux que nous avons consultés; exception faite, toutefois, pour les quelques-uns auxquels nous avons emprunté telle ou telle idée ou opposé certaines objections.

Pour plus de commodité, nous avons réparti sous deux rubriques l'ensemble des ouvrages, afin de ne pas mélanger les auteurs de l'époque contemporaine avec ceux dont les travaux constituent l'objet essentiel de notre étude historique.

I. — Ouvrages des xviie et xviiie siècles jusqu'a 1811

Béguelin, *Recherches sur l'existence des corps durs* (Mém. Acad., Berlin, 1751).

Bernoulli (Jean I), *Discours sur les lois de la communication du mouvement*, 1726.

— *Commercium philosophicum et mathematicum Got. Gul. Leibnitii et Johan. Bernoullii*, 2 vol., in-4, Lausanne et Genève, 1745.

Bertrand, *Examen des réflexions de M. D'Arcy sur le principe de la moindre action* (Mém. Acad., Berlin, 1753).

Bonfioli (Alphonsus Malvetus), *De Maupertuisiano minimae actionis principio* (De Bononiensi scientiarum et artium Instituto atque Academia commentarii, VI, 1783).

Carnot (Lazare), *Essai sur les machines en général.* Paris, 1783.

— *Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement.* Paris, 1803.

Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIe siècle, éd. par Fuss, 2 vol., Saint-Pétersbourg, 1843.

Courtivron (Gaspard de), *Recherches de statique et de dynamique où l'on donne un nouveau principe général pour la considération des corps animés par des forces variables suivant une loi quelconque* (Mém. Acad. des Sciences, 1749).

D'Alembert, Articles *Action*, *Cosmologie* et *Force* dans l'*Encyclopédie.*

D'Arcy, *Réflexions sur le principe de la moindre action de M. de Maupertuis* (Mém. Acad. des Sciences, 1749).

— *Réplique à un mémoire de M. de Maupertuis sur le principe de la moindre action* (Mém. Acad. des Sciences, 1752).

Dortous de Mairan, *Suite des Recherches physico-mathématiques sur la réflexion des corps* (Mém. Acad. des Sciences, 1723).

Euler (Léonard), *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, Lausanne, 1744.

— *De motu projectorum* (appendice à l'ouvrage précédent).

— *De curvis elasticis* (appendice à l'ouvrage précédent).

— *Recherches sur les plus grands et les plus petits qui se trouvent dans les actions des forces* (Mém. Acad., Berlin, 1748).

— *Réflexions sur quelques lois générales de la nature qui s'observent dans les effets des forces quelconques* (Mém. Acad., Berlin, 1748).
— *Harmonie entre les principes généraux de repos et de mouvement de M. de Maupertius* (Mém. Acad., Berlin, 1751).
— *Essai d'une démonstration métaphysique du principe général de l'équilibre* (Mém. Acad., Berlin, 1751).
— *Sur le principe de la moindre action* (Mém. Acad., Berlin 1751).
— *Examen de la dissertation de M. le professeur Kœnig insérée dans les Actes de Leipzig pour le mois de mars* 1751 (Mém. Acad., Berlin, 1751); avec une *Addition* (même année).
— *Dissertatio de principio minimae actionis una cum examine objectionum prof. Kœnigii*, Berlin, 1753; et en français, *Dissertation sur le principe de la moindre action, avec l'examen des objections du professeur Kœnig faites contre ce principe*, Leyde, 1753.
's Gravesande, *Essai d'une nouvelle théorie sur le choc des corps* (Journal littéraire de La Haye, XII).
— *Physices elementa mathematica experimentis confirmata sive introductio ad philosophiam newtonianam*, 2 vol., in-4, Leyde, 1720-1721; trad. fr. Elie de Joncourt, 2 vol., Leyde, 1746.
Kœnig (Samuel), *De universali principio aequilibrii et motus, in vi viva reperto deque nexu inter vim vivam et actionem, utriusque minimo* (Acta Eruditorum, mars 1751).
— *Appel au public*, 1752.
— *Défense de l'Appel au public*, 1752.
— *Recueil d'écrits sur la question de la moindre action*, Leyde, 1752.
Lagrange, *Recherches sur la méthode de maximis et minimis* (Miscellanea Taurinensia, I, 1759).
— *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies* (Miscellanea Taurinensia, II, 1762).
— *Application de la méthode exposée dans le mémoire précédent à la solution de différents problèmes de dynamique* (Miscellanea Taurinensia, II, 1762).
— *Mécanique analytique*, Paris, 1788.
— *Correspondance avec Euler* (Œuvres complètes, éd. J. A. Serret et G. Darboux, t. XIV, Paris, 1892).
Laplace, *Sur la double réfraction dans le spath d'Islande* (Mém. de l'Institut, 1809).
Leibniz, *Unicum opticae, catoptricae et dioptricæ principium* (Acta Eruditorum, 1682).
— *Specimen dynamicum pro admirandis naturæ legibus circa corporum vires et mutuas actiones detegendis et ad suas causas revocandis* (Acta Eruditorum, 1695).
— *De ipsa natura sive de vi insita actionibusque creaturarum* (Acta Eruditorum, 1698).
— *De rerum originatione radicali*, ed. Erdmann, 1840.
— *Tentamen anagogicum*, ed. Gerhardt, Halle, 1859.
— *Commercium philosophicum et mathematicum Got. Gul. Leibnitii et Johan. Bernoullii*, 2 vol., in-4, Lausanne et Genève, 1745.
— *Nouveaux essais sur l'entendement humain*, éd. Raspe, Amsterdam et Leipzig, 1765.

Martens, *Remarques sur la loi de l'épargne dont on fait à présent tant de cas et que M. de Maupertuis tâche d'introduire*, Amsterdam, 1752.

Maupertuis, *Accord de différentes lois de la nature qui avaient jusqu'ici paru incompatibles* (Mém. Acad. des Sciences, 1744).

— *Loi du repos des corps* (Mém. Acad. des Sciences, 1740).

— *Les lois du mouvement et du repos, déduites d'un principe de métaphysique* (Mém. Acad., Berlin, 1746).

— *Essai de cosmologie*, Berlin, 1750.

— *Réponse à un mémoire de M. D'Arcy sur la moindre action, insérée dans le volume de* 1749 *de l'Académie des Sciences de Paris* (Mém. Acad. Berlin, 1752).

Poisson, *Traité de mécanique*, 2 vol., in-8, Paris, 1811.

Riccati (Jacques et Vincent), *Systema universi. De viribus vivis deque virium mortuarum actione dialogi.*

Tetens (Johann Nicolaus), *Commentatio de principio minimi*, Bützow et Wismar, 1769.

Varignon, *Projet d'une nouvelle mécanique*, Paris, 1687.

— *Solution d'un problème de statique avec la manière d'en résoudre une infinité d'autres de la même espèce* (Mém. Acad. des Sciences, 1714).

— *Nouvelle mécanique* (posthume), 2 vol., Paris, 1725.

Wolff, Mémoire publié dans les Commentaires de l'Académie impériale de Saint-Pétersbourg, I, 1726.

II. — OUVRAGES DES XIXe ET XXe SIÈCLES (ÉTUDES ET COMMENTAIRES).

Anton (Ludvig). *Geschichte des isoperimetrischen Problems; eine geschichtliche Darstellung der Variationsrechnung von Bernoulli bis Lagrange*, Dresden, 1888.

Arago, *Sur la prise de possession des découvertes scientifiques* (Œuvres complètes, éd. Barral, XII).

Baehr (G. F. W.), *Sur le principe de la moindre action* (Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, La Haye, 1879).

Bobylev, *Ueber das Princip von Hamilton oder Ostrogradsky und über das Princip der kleinsten Wirkung* (Bull. de l'Acad. Imp. des Sc. de Saint-Pétersbourg, 1889, suppl. n° 5).

Braschmann, *Sur le principe de la moindre action* (Bull. de l'Acad. Imp. des Sc. de Saint-Pétersbourg, 1859).

Brassine (E.), *Nouvelle manière d'employer le principe de la moindre action dans les questions de dynamique* (C. R. Acad. des Sc., 1882, p. 169).

— *Sur un passage de la « Mécanique analytique » relatif au principe de la moindre action* (C. R. Acad. des Sc., 1882, p. 1110).

Brunet (Pierre), *Les physiciens hollandais et la méthode expérimentale en France au XVIIIe siècle*, Paris, Hermann, 1926.

— *Maupertuis. I. Etude biographique. II. L'œuvre et sa place dans la pensée scientifique et philosophique du XVIIIe siècle*, Paris, Hermann, 1929.

— *Gaspard de Courtivron* (Mém. de l'Acad. des Sc., Arts et B.-L. de Dijon, années 1927-1931).

Choisy (Jacques-Denis), *Essai historique sur le problème des maximums* (sic) *et minimums et sur ses applications à la mécanique*, Genève, 1823.

Couturat (Louis), *La logique de Leibniz, d'après des documents inédits*, Paris, 1901.

Darboux (G.), *Sur le mouvement d'un corps pesant et le principe de la moindre action* (Bull. des Sc. math. et astron., 1912).

Dienger (Joseph), *Da: Prinzip der kleinsten Wirkung* (Archiv der Mathematik und Physik, 1864).

Dühring (E.), *Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik*, Berlin, 1873.

Du Pasquier (L. G.), *Léonard Euler et ses amis*, Paris, Hermann, 1927.

Fortia d'Urban (A. J. Fr.), *Principes des sciences mathématiques*, Paris, 1811.

Gauss (Karl Friedrich), *Ueber ein neues allgemeines Grundgesetz in der Mechanik* (J. für die reine und angewandte Mathematik, Berlin, 1829).

Giesel (F.), *Geschichte der Variationsrechnung*, I, Theil, Torgau, 1857.

Gräffe (H.), *Commentatio historiam calculi variationum inde ab origine calculi differentialis atque integralis usque ad nostra tempora complectens*, Göttingen, 1825.

Guéroult (M.), *Note sur le principe de la moindre action*, en appendice à *Dynamique et métaphysique leibniziennes*, Paris, 1934.

Guiraudet (A. E. P.), *Aperçu historique sur l'origine et les progrès du calcul des variations jusqu'aux travaux de Lagrange*, Lille, 1862.

Helmholtz (von), *Zur Geschichte des Princips der kleinsten Action* (Sitz. ber. der Akad. der Wiss. zu Berlin, 10 mars 1887).

Hilbert (C. S.), *Ueber das Princip der kleinsten Wirkung* (Sitz. ber. der math. phys. Klasse der K. Bayerl. Akad. der Wiss. zu Munchen, 1904).

Hölder Otto), *Ueber die Principien von Hamilton und Maupertuis* (Nach. von der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen, Math. phys. Klasse, 1900).

Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, herausgg. von Clebsch, 1866.

Jouguet (E.), *Lectures de mécanique*, 2 vol., Paris, 1924.

Jourdain (Philip E. B.), *Maupertuis and the principle of least action* (The Monist, 1912).

— *The principle of least action*, Chicago, 1912.

Kabitz (Willy), *Ueber eine in Gotha aufgefundene Abschrift des von S. Kœnig in seinem Streite mit Maupertuis und der Akademie veröffentichen seiner Zeit für unecht erklärten Leibnizbriefes* (Sitz. ber. der K. Preuss. Akad. der Wiss. zu Berlin, 1913).

Klein (H.), *Die Prinzipien der Mechanik historisch und kritisch dargestellt*, Leipzig, 1872.

Kneser (Adolf), *Euler und die Variationsrechnung* (Abhandl. zur Geschichte der Mathematik, Leipzig, 1907).

— *Das Prinzip der kleinsten Wirkung von Leibniz bis zur Gegenwart*, Leipzig, 1928.

Liouville (Joseph), *Expression remarquable de la quantité qui, dans le mouvement d'un système de points matériels à liaisons quelconques, est*

un minimum en vertu du principe de la moindre action (C. R. Acad. des Sc., 1856).

Mach (Ernst), *Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt*, 5. Aufl., Leipzig, 1904, trad. fr. par Emile Bertrand, Paris, Hermann, 1904.

— *La connaissance et l'erreur*, trad. fr. Marcel Dufour, Paris, 1908.

Mayer (Adolf), *Geschichte des Princips der kleinsten Action*, Leipzig, 1877.

Mouy (Paul), *Les lois du choc des corps d'après Malebranche*, Paris, 1927.

— *Le développement de la physique cartésienne*, 1646-1712, Paris, 1934.

Ostrogradsky, *Mémoire sur les équations différentielles relatives au problème des isopérimètres* (Mém. de l'Acad. de Saint-Pétersbourg, 6e série, Sc. math. et phys., IV).

Petzoldt (J.), *Maxima, minima und Oekonomie*, Altenburg, 1891.

Planck (Max), *Physikalische Rundblicke*, Berlin, 1922.

— *Das Prinzip der kleinsten Wirkung*, in *Physik*, Unt. Mitarb. hervorragender Fachgelehrter, hrsg. von E. Lecher, 2. Aufl., Berlin, 1925.

Polak (L. S.), *Lagrange et le principe de la moindre action*, paru en russe avec résumé en français (Arch. ist. nauki i techn., Leningrad, 1935).

Réthy (M.), *Ueber das Princip der kleinsten Action und das Hamilton'sche Princip* (Mathemat. Annalen, Leipzig, 1897).

Rodrigues (Olinde), *Correspondance de l'Ecole Polytechnique*, III, 1816.

Sabinine (G. Egor Th.), *Sur le principe de la moindre action* (Annali di matematica pura ed applicata, Roma, 1884).

Serret (J. A.), *Mémoire sur le principe de la moindre action* (C. R. Acad. des Sc., 1871 et Bull. des Sc. math. et astron., 1871), avec deux *Additions* (C. R. Acad. des Sc., 1871 et 1879).

Sloudsky (Th.), *Note sur le principe de la moindre action* (Nouv. Annales de math., Paris, 1879).

Spiess (Otto), *Leonhard Euler*, Leipzig, 1929.

Todhunter (I.), *A history of the Progress of the Calculus of Variations during the nineteenth Century*, Cambridge, 1861.

Uckermann (K.), *Ueber das Princip der kleinsten Wirkung*, Marburg, 1893.

Voss (A.), *Ueber die Principien von Hamilton und Maupertuis* (Nach, von der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen, Math. phys. Klasse, 1900).

TABLE ANALYTIQUE DES MATIÈRES (1)

(1) Dans une étude monographique telle que celle-ci, il nous a paru opportun dé maintenir, le plus possible, la continuité du texte, au lieu de le découper par de multiples paragraphes. Les rubriques sous lesquelles nous avons réparti la matière de cette étude historique ne constituent pas, d'ailleurs, de véritables chapitres, pas plus que les notes intercalées entre certaines d'entre elles ne divisent à proprement parler l'ensemble en parties. Le groupement des notes en trois blocs, malgré le numérotage p ogressif, a seulement pour but de les rapprocher de la sorte un peu plus des textes qu'elles concernent. Pour la commodité des recherches, nous avons jugé utile de faire suivre ici chacun des titres de quelques indications plus détaillées, avec renvois précis aux pages.

Printed in France.

8407-38. — Imprimé par ARRAULT et Cie, à Tours (France).



ACTUALITÉS SCIENTIFIQUE



PUBLIÉES SOUS LA DIRE

A. REY
Professeur à la Sorbonne
HISTOIRE DES SCIENCES

Y. ROCARD
Maître de Recherches
THÉORIES MÉCANIQUES
(Hydrodynamique-Acoustique)

R. SOUÈGES
Chef de Travaux à la Faculté de Pharmacie
EMBRYOLOGIE
ET MORPHOLOGIE VÉGÉTALES

TAKAGI
Professeur à l'Université Impériale de Tokyo
MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

TAMIYA-(HIROSHI)
Membre du Tokugawa Biologisches Institut Tokyo
BIOLOGIE (Physiologie cellulaire)

A. TCHITCHIBABINE
Membre de l'Académie des Sciences de l'U. R. S. S.
CHIMIE ORGANIQUE
(Série hétérocyclique)

Sous-directeur de la Station Biologique de Roscoff
BIOMETRIE
ET STATISTIQUE BIOLOGIQUE

G. URBAIN
Membre de l'Institut
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris
THÉORIES CHIMIQUES

Pierre URBAIN
Maître de Conférences à l'Institut d'Hydrologie et de Climatologie de Paris
GEOCHIMIE

Y. VERLAINE
Professeur à l'Université de Liége.
PSYCHOLOGIE ANIMALE

P. WEISS
Membre de l'Institut
Directeur de l'Institut de Physique de l'Université de Strasbourg
MAGNETISME

R. WURMSER
Directeur du Laboratoire de Biophysique de l'Ecole des Hautes-Etudes
BIOPHYSIQUE

Actualités Scientifiques et Industrielles

753. KAHANE et LEVY. **Colamine. Triméthylamine. Bétaïne. Carnitine. Muscarine. Bétaïnaldéhyde. Sinapine** .... 25 fr.
754. L. RAPKINE. G. TEISSIER. **Développement, Croissance, Régénération** .... 25 fr.
755. A. MORETTE. **Rapports entre les conductibilités thermiques et électriques dans les métaux et alliages** .... 12 fr.
756. S. MORRIS. **Nutrition et lactation** .... 25 fr.
757. M. PARODI. **Recherches dans l'infrarouge lointain par la méthode des rayons restants** .... 40 fr.
758. A. GIAO. **Phénoménologie unitaire. Recherches sur les propriétés générales de l'évolution. I. Le principe et l'équation d'évolution** .... 30 fr.
759. A. GIAO. **Phénoménologie unitaire. Recherches sur les propriétés générales de l'évolution. II. Equations de prévision. Evolution infinitésimale** .... 20 fr.
760. A. GIAO. **Phénoménologie unitaire ou théorie générale des champs** .... 25 fr.
761. A. ARVANITAKI. **Propriétés rythmiques de la matière vivante. Variations graduées de la polarisation des systèmes eOcitables et rythmicités de divers degrés.** 1re partie. **Etude expérimentale sur les nerfs isolés des invertébrés** .... 40 fr.
762. A. ARVANITAKI. **Propriétés rythmiques de la matière vivante. Variations graduées de la polarisation des systèmes et rythmicités de divers degrés.** 2e partie. **Etude expérimentale sur le myocarde des helix** .... 20 fr.
763. H. CARDOT et CL. FROMAGEOT. **Propriétés générales du nerf et du muscle. Contraction musculaire** .... 25 fr.
764. E. KAHANE-J. LEVY. **Dosages biologiques** .... 10 fr.
765. A. POLICARD. **La méthode de la micro-incinération. Exposé pratique** .... 15 fr.

Liste complète à la fin du volume.

8407-38. — Imprimé chez ARRAULT et Cie, à Tours, France.